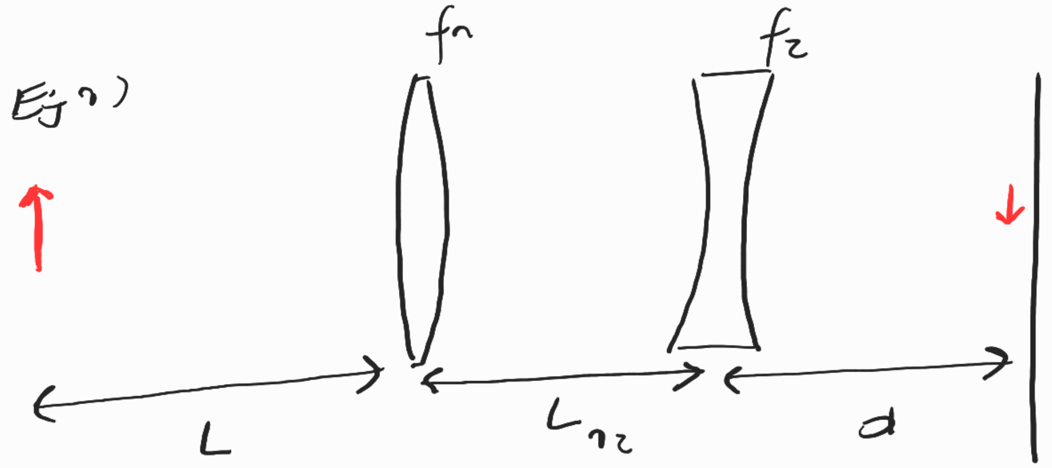
Examen Óptica, 13 diciembre de 2021

Ej 1)



$f_1 = 50\,mm$

$f_2 = -100\,mm$

La matriz que representa al sistema es: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 - L_{12}/f_1 & L_{12} \\ -\underbrace{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L_{12}}{f_1 f_2}\right)} & 1 - \frac{L_{12}}{f_2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(equivalente de f_1 y f_2 separados una distancia L_{12}) $\frac{1}{f_{eq}}$: $f_{eq} \cong 71.43\,mm$

- La condición de formación de imágenes es: $B = 0$!

$$B = L\left(1 - L_{12}/f_1 - d/f_{eq}\right) + L_{12} + d\left(1 - \frac{L_{12}}{f_2}\right) = 0;$$

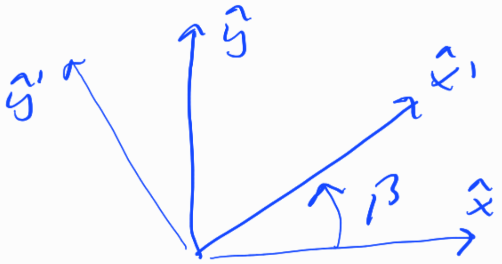
$$d = \left(\frac{L}{f_{eq}} + \frac{L_{12}}{f_2} - 1\right)^{-1}\left[L_{12} + L\left(1 - \frac{L_{12}}{f_1}\right)\right] = \underline{55.77\,mm}$$

b) Bajo la condición de formación de imágenes ($B = 0$), A representa la magnificación lateral (m):

$$m = A = 1 - L_{12}/f_1 - d/f_{eq} \cong \boxed{-0.77}$$

(img. invertida)

Ejz) a) $J_p(\beta) = R^T(\beta)\, \underbrace{J_P(0)}\, R(\beta)$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ polarizador lineal de eje de transmisión horizontal (así se escribe en $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$)

$$\hat{x}' = \cos\beta\, \hat{x} + \operatorname{sen}\beta\, \hat{y}$$
$$\hat{y}' = -\operatorname{sen}\beta\, \hat{x} + \cos\beta\, \hat{y}$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

(matriz de rotación de la base $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ a $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$)

$$J_P(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \operatorname{sen}\beta\cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta\cos\beta & \operatorname{sen}^2\beta \end{pmatrix}$$

b) $$J_R(\lambda/2, \alpha) = R^T(\alpha) \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-j\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{+j\pi/2} \end{pmatrix}}_{e^{-j\pi/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} R(\alpha)$$

HWP eje rápido horizontal: $\epsilon_y = +\frac{\pi}{2}$, $\epsilon_x = -\frac{\pi}{2}$

$$M = \begin{pmatrix} e^{-j\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{+j\pi/2} \end{pmatrix} = e^{-j\pi/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$e^{+j\pi}$

$$\boxed{J_R\left(\frac{\lambda}{2}, \alpha\right)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \underbrace{e^{-j\pi/2}}_{-j} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{-j\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}}$$

b) $\alpha = \beta = \pi/4$:
$$J_P(\pi/4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$J_R\left(\frac{\lambda}{2}, \pi/4\right) = -j\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Extinción:

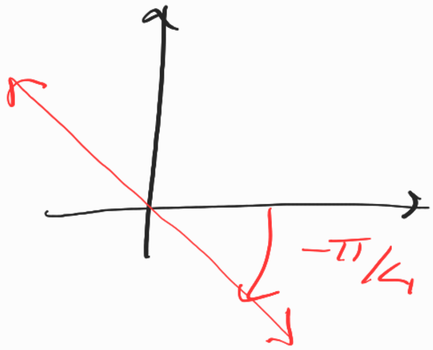
$$J_P(\pi/4)\, J_R\left(\frac{\lambda}{2}, \pi/4\right)\begin{pmatrix} \cos\psi \\ \operatorname{sen}\psi\, e^{j\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi\, e^{j\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, e^{j\delta} \\ \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, e^{j\delta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, \underbrace{e^{j\delta}}_{\cos\delta + j \operatorname{sen}\delta} = 0 :$$

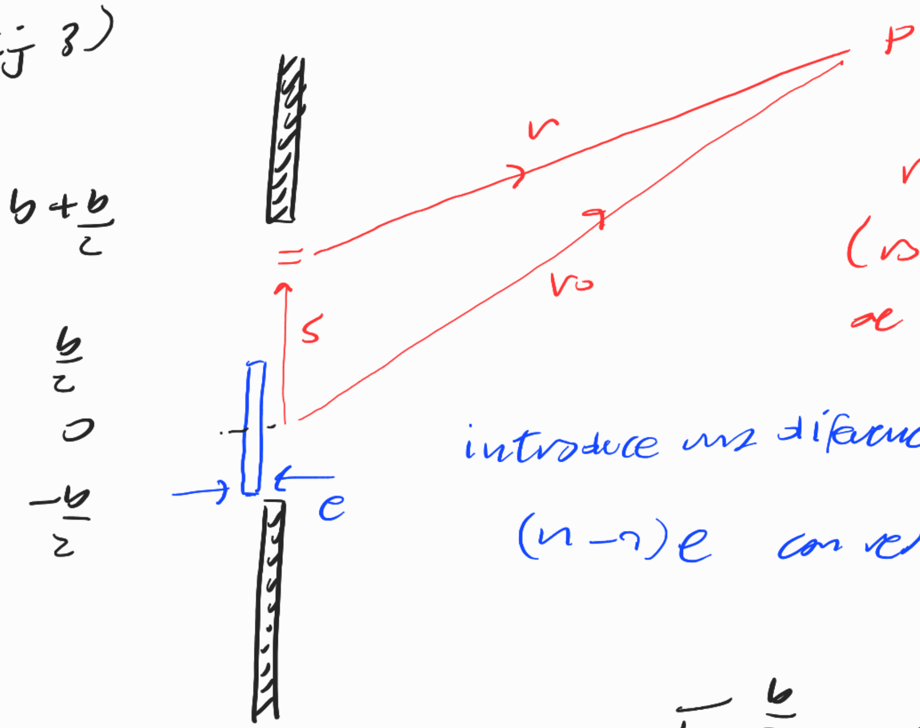
igualamos a cero parte real e imaginaria: $\begin{cases} \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \cos\delta = 0 \\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 0, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}} : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



(idem: $\delta = \pi$, $\varphi = \pi/4$ representa el mismo estado)

Ej 3)



$r \approx r_0 - s\,\text{sen}\theta$

(r₀ medido desde el medio de la 'rendija' inferior)

introduce una diferencia de caminos ópticos!

$(n-1)e$ con respecto a la rendija superior

$$E_P = \frac{E_L}{r_0} e^{j(Kr_0-\omega t)} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ds\, e^{-jKs\,\text{sen}\theta}\, e^{jK(n-1)e} + \int_{\frac{b}{2}}^{b+\frac{b}{2}} ds\, e^{-jKs\,\text{sen}\theta} \right] =$$

(campo en la apertura)

Cambio de variable: $s = b+s'$

$$\underbrace{\frac{E_L}{r_0} e^{j(Kr_0-\omega t)} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ds\, e^{-jKs\,\text{sen}\theta} \right)}_{\text{difracción por una rendija de ancho } b} \cdot \left(e^{jK(n-1)e} + e^{-jKb\,\text{sen}\theta} \right)$$

$$e^{-jKb\,\text{sen}\theta} \underbrace{\left(1 + e^{jK[(n-1)e + b\,\text{sen}\theta]} \right)}$$

interferencia por dos rendijas separadas b, la inferior cubierta con la lámina de espesor e

$\Rightarrow I_P \propto E_P E_P^*$

$$= \frac{|E_L|^2 b^2}{r_0^2} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{Kb}{2} \operatorname{sen}\theta\right)}{\left(\frac{K}{2} b \operatorname{sen}\theta\right)} \right)^2 4 \cos^2 \frac{K}{2} \left(b \operatorname{sen}\theta + (n-1)e \right)$$

Obs: para $e=0$ (no hay película):

$$I_P \propto \underbrace{\frac{|E_L|^2 b^2}{r_0^2} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{Kb}{2} \operatorname{sen}\theta\right)}{\left(\frac{K}{2} b \operatorname{sen}\theta\right)} \right)^2 4 \cos^2\left(\frac{Kb}{2} \operatorname{sen}\theta\right)} =$$

$$\frac{|E_L|^2 b^2}{r_0^2} \left(\frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{K}{2} b \operatorname{sen}\theta\right) \cos\left(\frac{K}{2} b \operatorname{sen}\theta\right)}{\left(\frac{K}{2} b \operatorname{sen}\theta\right)} \right)^2 =$$

$$\frac{|E_L|^2 (2b)^2}{r_0^2} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{K}{2}(2b) \operatorname{sen}\theta}{\frac{K}{2}(2b) \operatorname{sen}\theta} \right)^2$$

patrón de intensidad de una rendija de ancho $2b$ ✓

b) $I_P(\theta=0) = 0$: $\cos\left(\frac{K}{2}(n-1)e\right) = 0$:

$$\frac{\pi}{\lambda}(n-1)e = \frac{\pi}{2} + m\pi$$; el menor espesor posible se tiene para $m=0$:

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\lambda}(n-1)e_{min} = \frac{\pi}{2} \; ; \; \boxed{e_{min} = \frac{\lambda}{2(n-1)}}$$