Distribuciones

de

Probabilidad

FACULTAD DE INGENIERIA

Distribuciones de Probabilidad

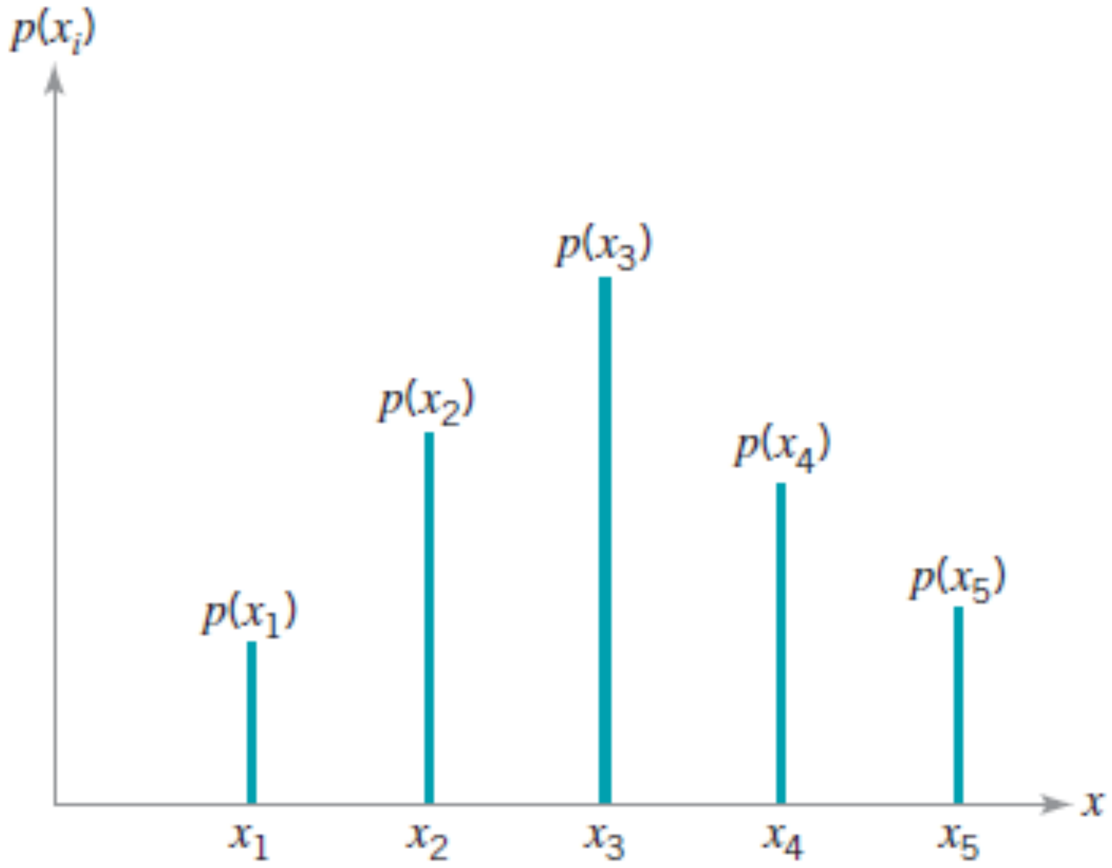
- Una distribución de probabilidad es un modelo matemático que relaciona los resultados de un experimento y la probabilidad asociada con cada resultado.
- Por ejemplo, si se lanza al aire una moneda.

Evento E(x)	Probabilidad P(x)
Cara	0.5
Número	0.5
Total	1

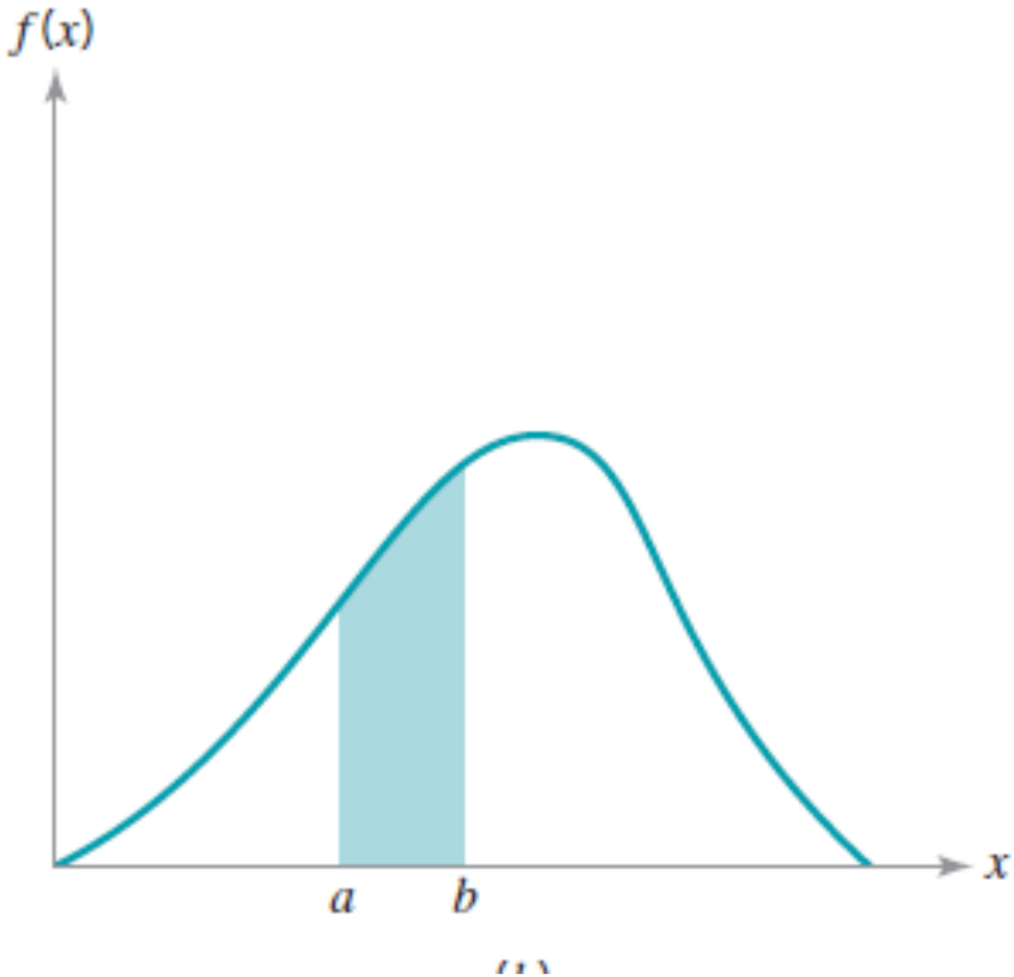
Variables

- Variable aleatoria.
  - Variable aleatoria discreta.
  - Variable aleatoria continua

Tipo de Distribuciones



Tipo de Distribuciones



Algunos ejemplos

Distribuciones de probabilidad discretas	Distribuciones de probabilidad continuas
Número de caras en tres lanzamientos de una moneda.	El peso de cada estudiante de la clase.
Número de burbujas por envase de vidrio que son generadas en un proceso dado..	La temperatura ambiente en esta aula.
Número de obreros que se ausentaron hoy en el segundo turno.	El diámetro de un engrane en pulgadas
Número de productos defectuosos en un lote de 25 productos.	Concentración en gramos de plata de algunas muestras de mineral

FACULTAD DE INGENIERIA

Distribuciones de Probabilidad Discretas

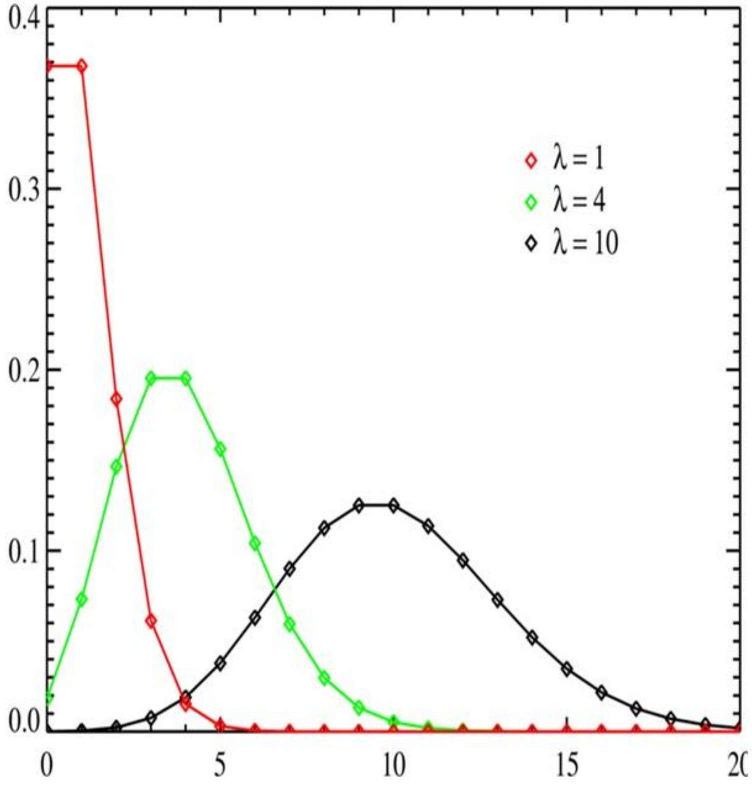
- Binomial
- Hipergeométrica.
- Poisson.

Distribuciones de Probabilidad Continuas

- Distribución Normal.

- Distribución t de Student

La Distribución de Poisson



Utilidad

- La distribución de Poisson se utiliza en situaciones donde los sucesos son impredecibles o de ocurrencia **aleatoria**. En otras palabras no se sabe el total de posibles resultados.

- Permite determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso con **resultado discreto**.

- Es muy útil cuando la muestra o segmento *n* es grande y la probabilidad de **éxitos** *p* es pequeña.

- Se utiliza cuando la probabilidad del evento que nos interesa se distribuye dentro de un **segmento** *n* dado como por ejemplo distancia, área, volumen o tiempo definido.

FACULTAD DE INGENIERIA

Ejemplos de la utilidad

- La llegada de un cliente al negocio durante una hora.
- Las llamadas telefónicas que se reciben en un día.
- Los defectos en manufactura de papel por cada metro producido.
- Los envases llenados fuera de los límites por cada 100 galones de producto terminado.

La distribución de Poisson se emplea para describir procesos con un elemento en común, pueden ser descritos por una **variable aleatoria discreta**.

Propiedades de un proceso de Poisson

- La probabilidad de observar exactamente un éxito en el segmento o tamaño de muestra n es constante.

- El evento debe considerarse un suceso raro.

- El evento debe ser aleatorio e independiente de otros eventos

Si repetimos el experimento *n* veces podemos obtener resultados para la construcción de la distribución de Poisson.

FACULTAD DE INGENIERIA

La distribución de Poisson

La distribución de probabilidad de Poisson es un ejemplo de distribución de probabilidad discreta.

Cuando en una distribución binomial se realiza el experimento muchas veces, la muestra *n* es grande y la probabilidad de éxito *p* en cada ensayo es baja, es aquí donde aplica el modelo de distribución de Poisson.

Se tiene que cumplir que:

$$p < 0.10$$

$$p * n < 10$$

En el límite, se tiende a la fórmula de Poisson:

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}}$$

x   variable aleatoria

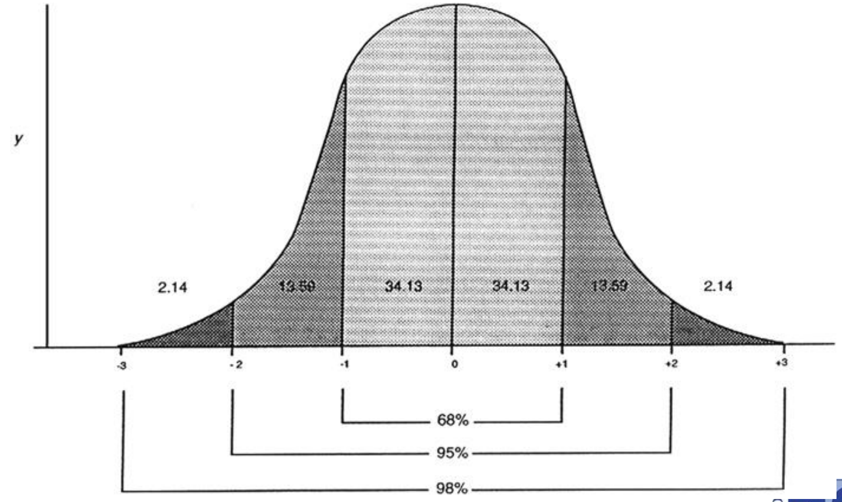
λ   parámetro de la Dist. de Poisson

Donde: $\bar{x} = \lambda$

(λ Promedio de ocurrencia del fenómeno)

Distribución Normal

- Descubierta en 1733, descrita también por Laplace y Gauss (sinónimo de la forma gráfica de esta distribución).
- Importancia práctica de esta distribución teórica:
  - Muchos fenómenos distribuidos en forma Normal.
  - Distribución de promedios.
  - Distribución de errores.



Está caracterizada por dos parámetros: la media, μ y la desviación típica, σ.
Su función de densidad es:

$$N(\mu,\sigma) = P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (\sigma > 0)$$

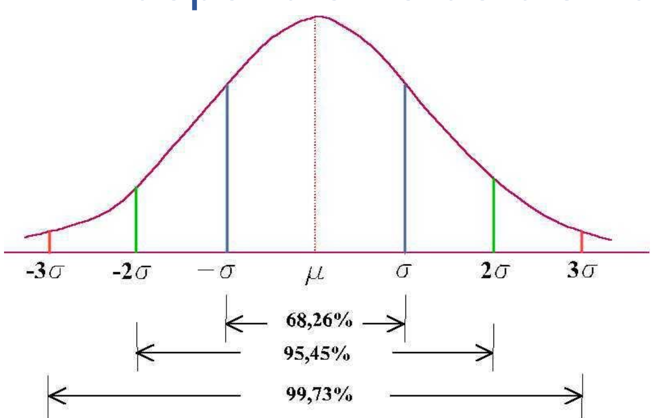
Y la función de distribución F(x) integrando la función de densidad de probabilidad:

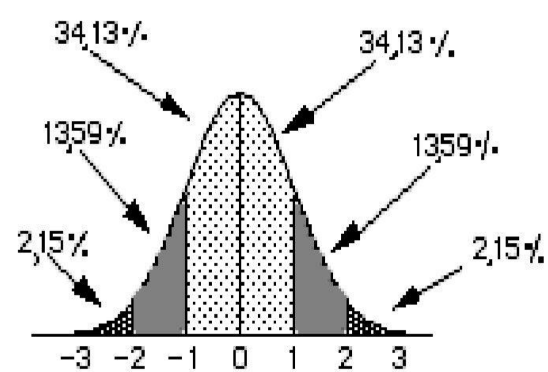
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv$$

FACULTAD DE INGENIERIA

Características

- Área bajo la curva entre 2 puntos representa probabilidad que ocurra un hecho entre esos dos puntos
- Su dominio va de menos infinito a más infinito;
- Es simétrica con respecto a su media;
- Es asintótica al eje x por ambos lados;
- El valor del área debajo de toda la curva es igual a 1;
- El centro de la curva está representado por la media poblacional μ.
- Para cualquier curva normal, el área de - σ a + σ es igual a 0.6827; de -2 σ a +2 σ de 0,9545 y de -3 σ a +3 σ de 0,9973;
- Distribución muestreal de varios estadísticos, como `x es normal e independiente de distribución de la población.





¿Cómo calcular probabilidades asociadas a una curva normal específica?

Dado que tanto μ como σ pueden asumir **infinitos valores,** es impracticable tabular las probabilidades para todas las posibles distribuciones normales. Para solucionarlo, se utiliza la **distribución normal reducida o tipificada.**

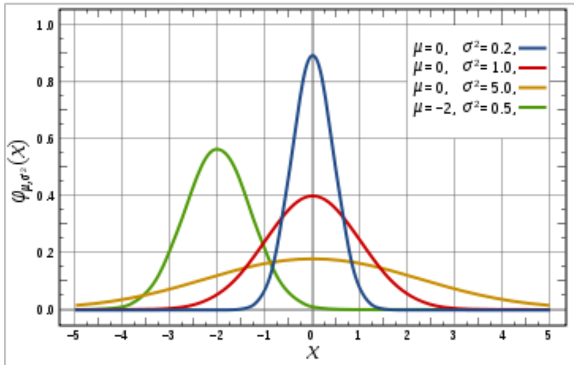
Se define una variable $Z = \boxed{\dfrac{x - \mu}{\sigma}}$

FACULTAD DE INGENIERIA

D. Normal Reducida (estandarizada)

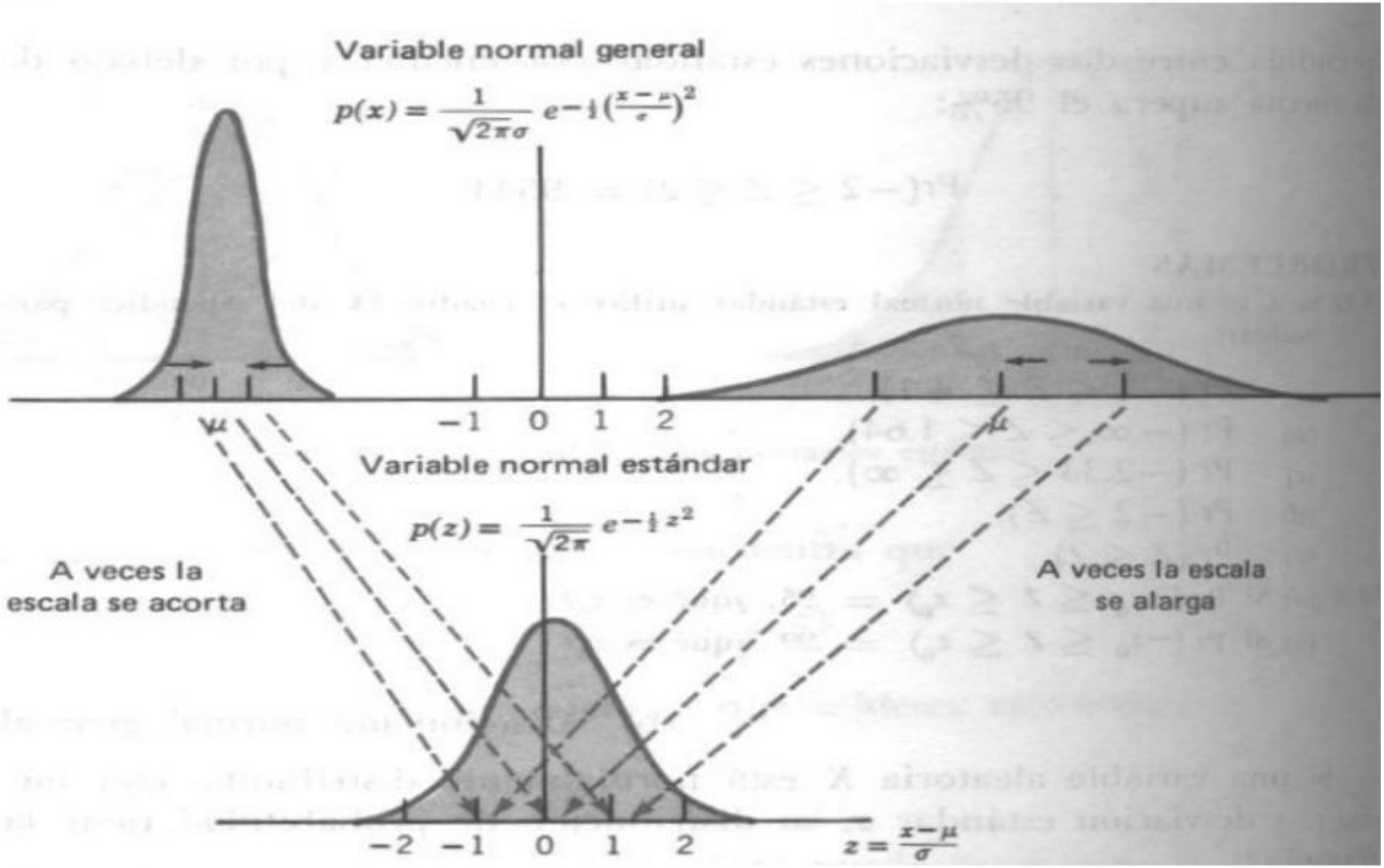
- Distribución especial que representa a todas las variables aleatorias normales y que es la distribución de otra variable normal llamada Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



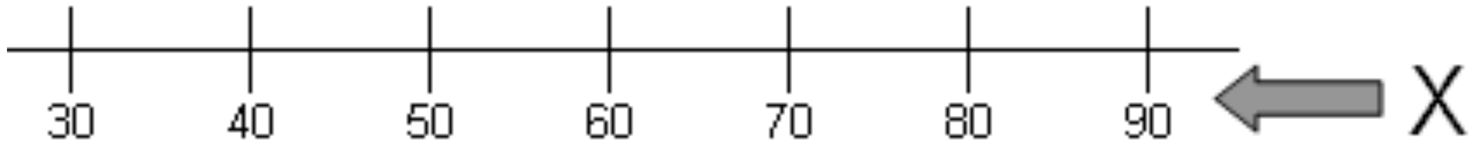
Z se la conoce como variable aleatoria estandarizada.

- Esta función se caracteriza por tener media igual a cero y desviación tipificada igual a uno : N(0,1)
- Representa a todas las distribuciones Normales.
- Valores obtenidos de tabla Normal válidos para todas las distribuciones Normal de media = μ y varianza $=\sigma^2$.



Nos permite así comparar entre dos valores de dos distribuciones normales diferentes, para saber cuál de las dos es más extremo.

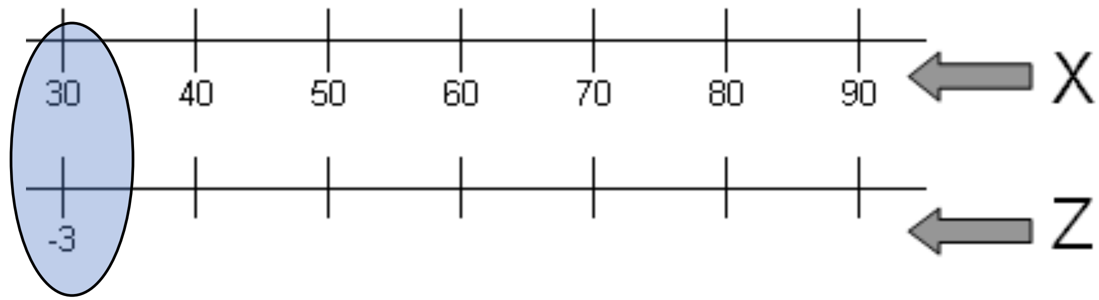
Supongamos que los datos de una muestra van de 30 a 90 (en el plano cartesiano se traza la recta en una escala de 10 en 10).



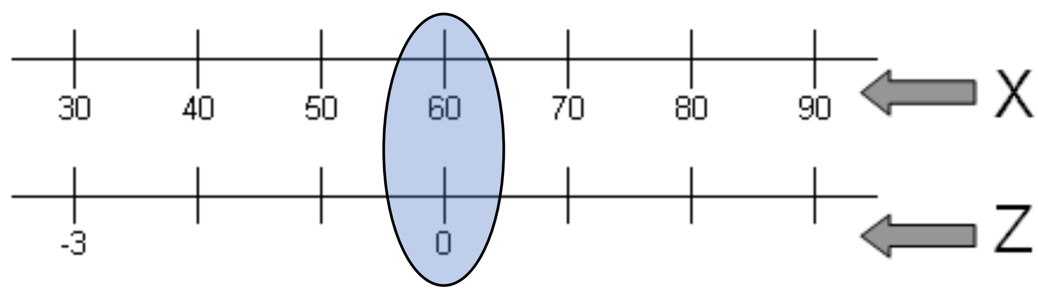
En la muestra, la media aritmética es 60 y la desviación estándar es 10.

Estandarizar cada uno de los datos de la recta del plano cartesiano; es decir, cuál es el valor de Z de cada dato desde 30 hasta 90.

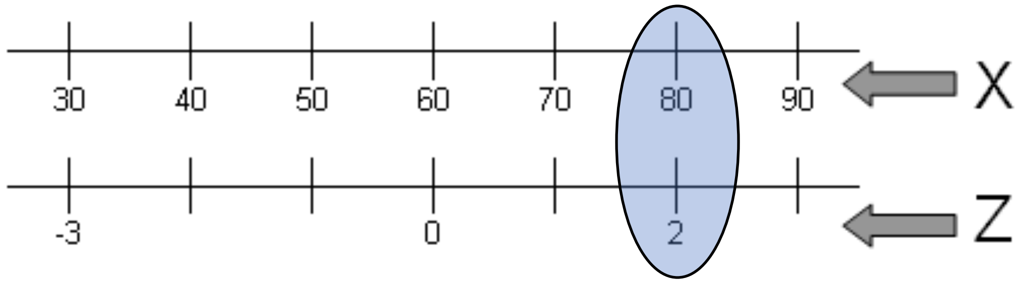
$$Para\ \ X = 30 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{30-60}{10} = \frac{-30}{10} = -3$$



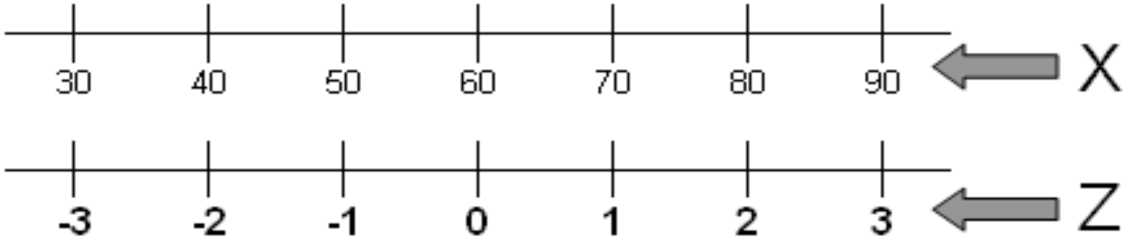
$$Para\ \ X = 60 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{60-60}{10} = \frac{0}{10} = 0$$



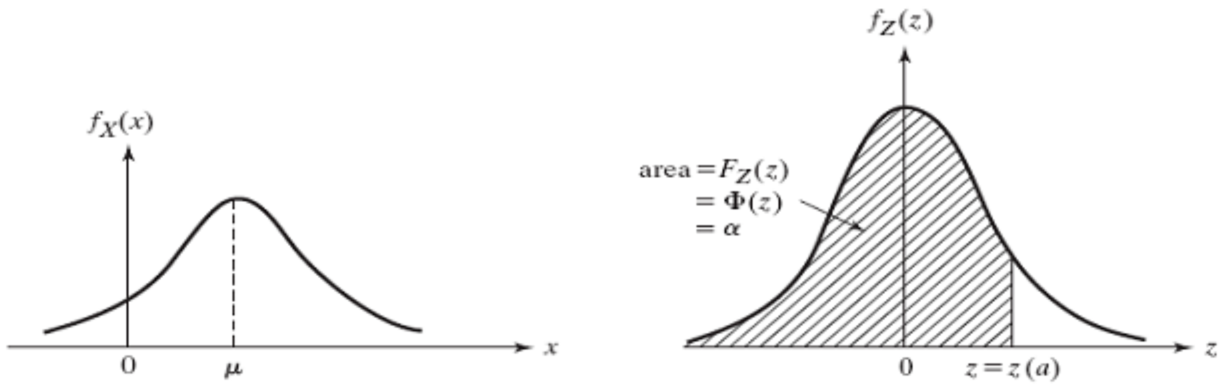
$$Para\ \ X = 80 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{80-60}{10} = \frac{20}{10} = 2$$



$$Para\ \ X = 90 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{90-60}{10} = \frac{30}{10} = 3$$



Distribución normal (curva de Gauss)



(a) (b)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$Z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Curva campana simétrica

Teorema del Límite Central

Nos indica que, bajo condiciones muy generales, según aumenta la cantidad de datos, la distribución de la suma de variables aleatorias tendera a seguir hacia una distribución normal.

En otras palabras el Teorema del Límite Central garantiza una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande.

En el siguiente histograma podemos observar la distribución de frecuencias por peso de acuerdo a la edad. De acuerdo a este teorema según aumenten la cantidad de dato se podrá trazar una curva que tome cada vez más formación en forma campana.

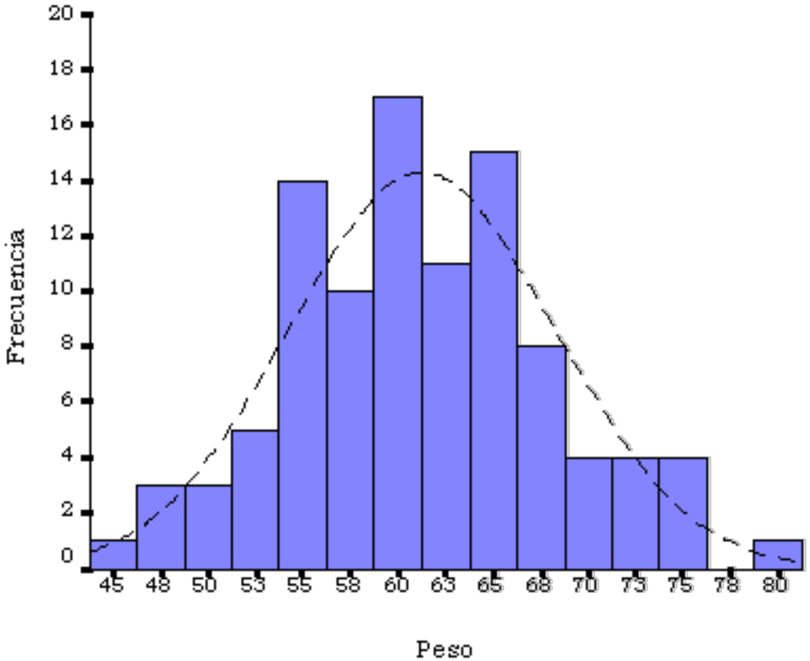
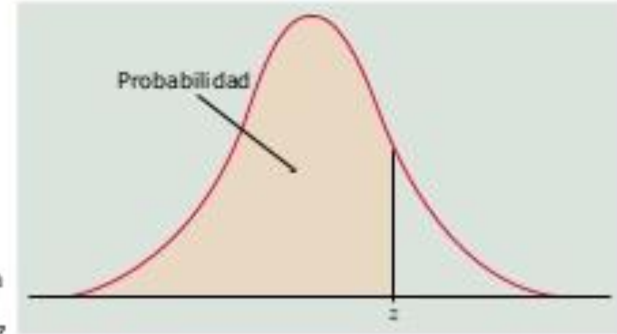


Tabla Distribución Z



El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

- Se configura el valor de Z de manera que tenga 2 decimales

Z	Z con 2 decimales
1.02	1.02
1	1.00
2	2.00
2.2	2.20
2.22	2.22
-2.26	-2.26
0.25	0.25
-0.08	0.08

- Se divide en dos números; el primero formado por la parte entera y el primer decimal; el segundo formado por el segundo decimal

Z	Columna	Fila
1.02	1.00	0.02
1.00	1.00	0.00
2.00	2.00	0.00
2.20	2.20	0.00
2.22	2.20	0.02
-2.26	2.20	0.06
0.25	0.20	0.05
-0.08	0.00	0.08

FACULTAD DE INGENIERIA

- En la primer columna se busca el que tiene la parte entera

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0							
0.1							
0.2							
0.3							
0.4							
0.5							
0.6							
0.7							
0.8							
0.9							
1.0							
1.1							
1.2							
1.3							
1.4							

FACULTAD DE INGENIERIA

- En la fila de encabezado se busca el que tiene el segundo decimal.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.0							
0.1							
0.2							
0.3							
0.4							
0.5							
0.6							
0.7							
0.8							
0.9							
1.0							
1.1							
1.2							
1.3							

- En la fila de encabezado se busca el que tiene el segundo decimal.

Z	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0					
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6					
0.7					
0.8					
0.9					
1.0					

Encontrar el área para Z=1.02

- Z se convierte en 1.0 y 0.02
- Localizar 1.0 en la tabla

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0						
0.1						
0.2						
0.3						
0.4						
0.5						
0.6						
0.7						
0.8						
0.9						
1.0						
1.1						

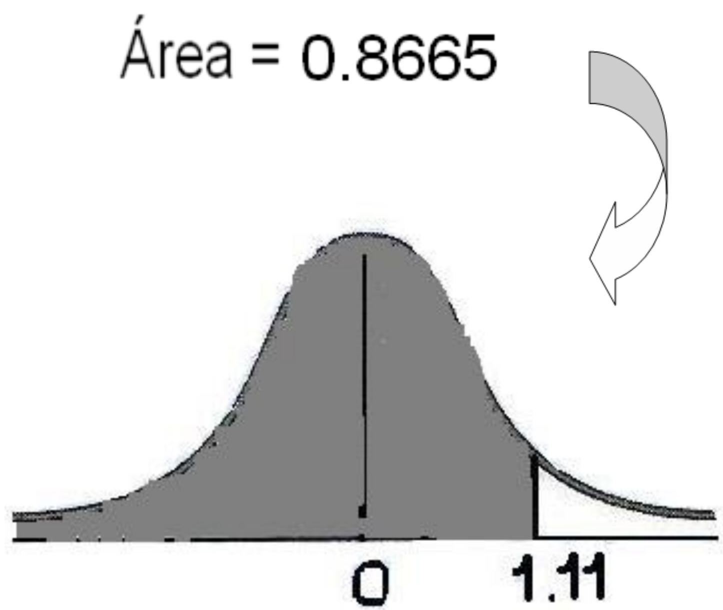
- Localizar 0.02 en la tabla
- Ubicar la intersección
- En la tabla de la curva normal se muestra la probabilidad 0.3461
- La probabilidad es de 34.61%

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0						
0.1						
0.2						
0.3						
0.4						
0.5						
0.6						
0.7						
0.8						
0.9						
1.0						
1.1						

Calcular $P(Z < 1.11)$

- Se va a calcular el área de 0 a 1.11
- El número 1.11 se convierte en : **1.1** y **0.01**
- Buscar en la columna 1.1
- Buscar en la fila 0.01

Z	-0.01	0.00	0.01	0.02	0.03
0.9					
1.0					
1.1			0.8665		
1.2					
1.3					
1.4					

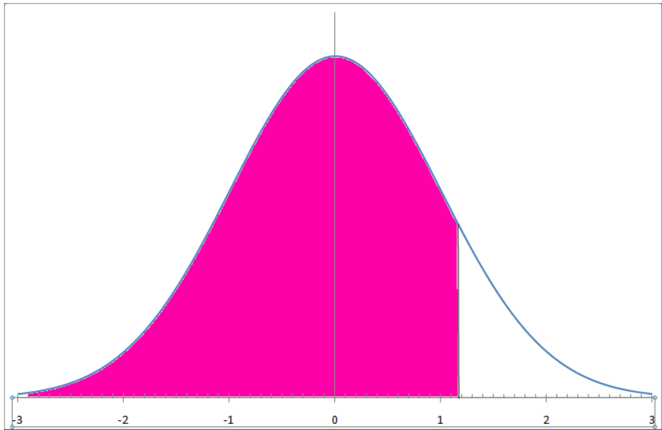


Uso Tabla Normal Estándar

Obtenga la probabilidad de que Z obtenga los siguientes valores:

- **P ($Z \leq 1.17$)**
  - Buscamos en la columna izquierda de la tabla el valor 1.1, y en la primera fila el valor 0.07, interceptamos ambos valores obteniendo el valor de 0.8790, que es el valor que buscábamos:

$P(Z \leq 1.17) = 0.879$



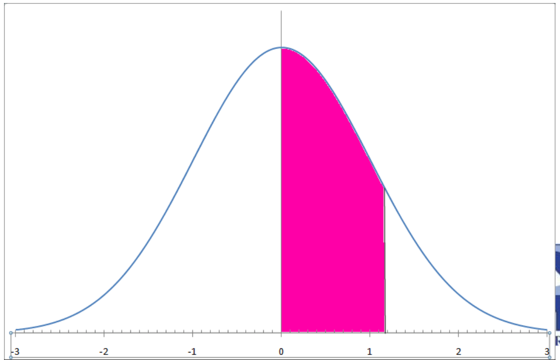
P(0 ≤ Z ≤ 1.17)

- Esto lo podemos escribir de la siguiente forma también:

P(Z ≤1.17) - P(Z ≤ 0)

- El primer término lo conocemos, por que lo resolvimos en el literal a.
- Para el segundo término sabemos que la distribución normal es simétrica y que su área total es igual a 1, por lo tanto el área que hay de - ∞ a 0 (P(Z ≤ 0)) es igual a 1/2 = 0.5.
- Por lo que el valor que buscábamos estará dado por:

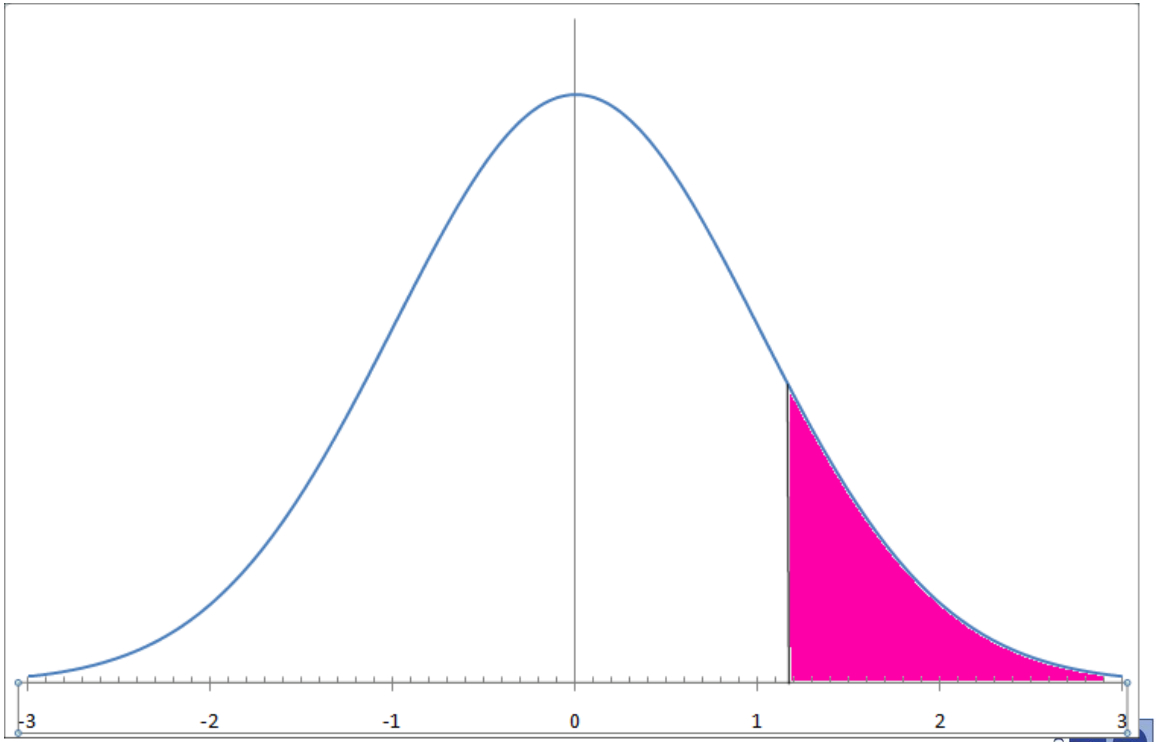
P(0≤ Z ≤ 1.17) = 0.879 - 0.5 = 0.379



P(Z >1.17)

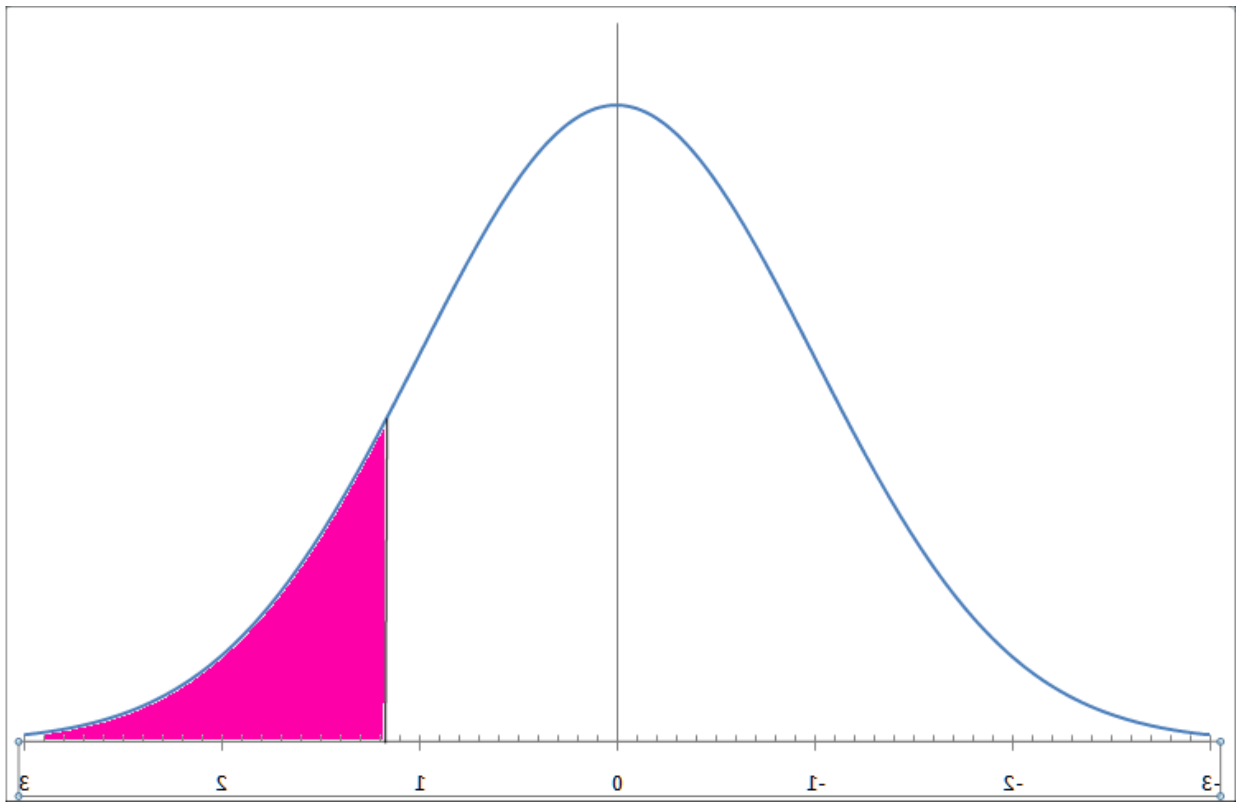
- Sabiendo que el área total bajo toda la curva Normal de - ∞ a + ∞ es igual a 1, y conociendo el valor del área de - ∞ a 1.17, el valor del área de 1.17 a + ∞ será:

$$1 - P(Z \leq 1.17) = 1 - 0.879 = 0.121$$



- **$P(Z \leq -1.17)$**
  - Como estamos tratando con una curva simétrica, este valor será el mismo que el del literal c:

$$P(Z \leq -1.17) = P(Z \geq 1.17) = 0.121$$

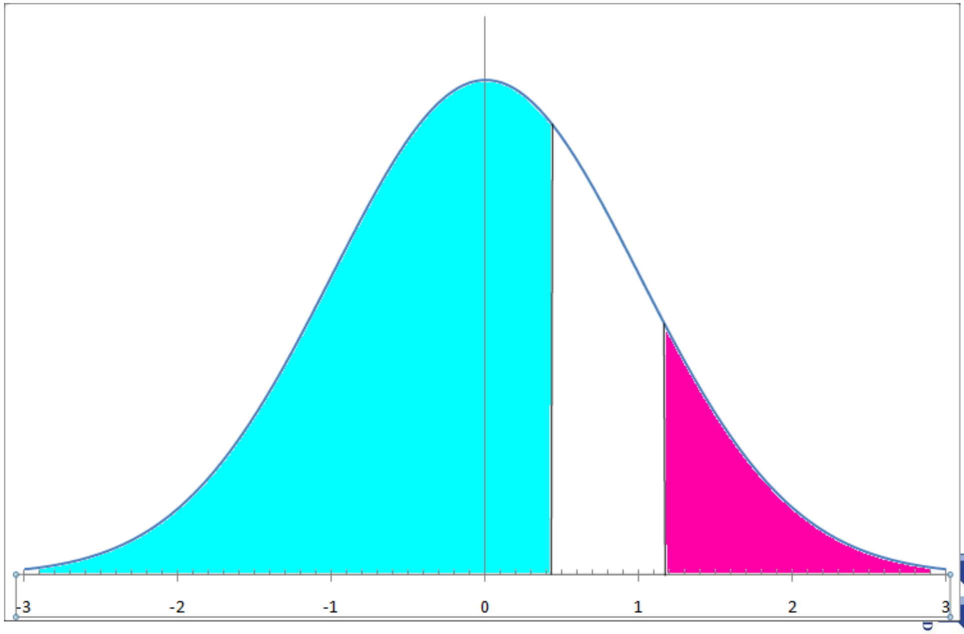


- **P(0.42 ≤ Z ≤ 1.17)**
  - Al igual que en el literal b, esto lo podemos escribir como:

P(Z ≤1.17) - P(Z ≤ 0.42).

  - El primer valor lo conocemos, el segundo lo encontramos en la tabla de la misma forma:

P(Z ≤ 1.17) – P(Z ≤ 0.42)= 0.879-0.6628= 0.2162

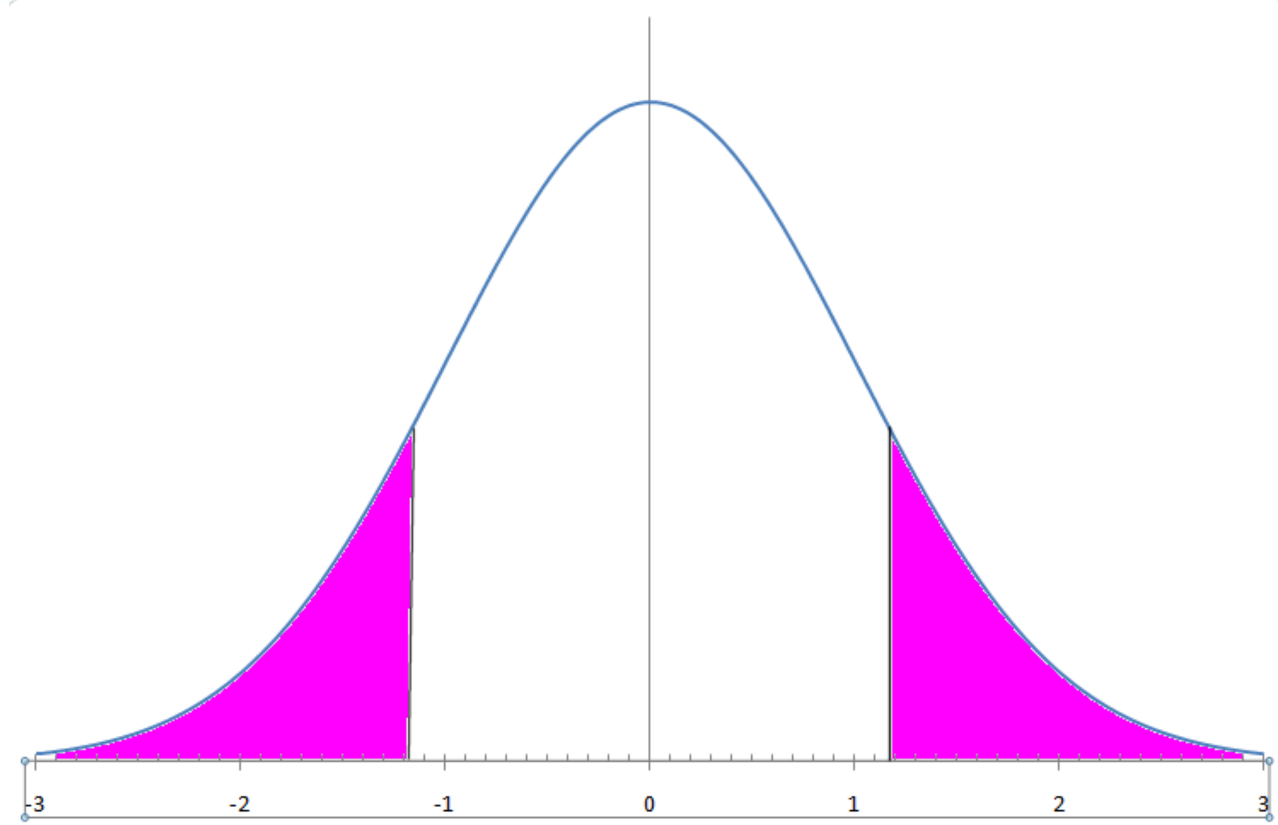


INGENIERIA

h) $P(|Z| \geq 1.17)$

- Determinar el área de $-\infty$ a -1.17 y de 1.17 a $+\infty$. Como la curva es simétrica, simplemente multiplicamos el valor de $P(Z \geq 1.17)$ del literal c por 2:

$$P(|Z| \geq 1.17) = 2 \times P(Z \geq 1.17) = 2 \times 0.121 = 0.242$$



FACULTAD DE INGENIERIA

i) $P(|Z| \leq 1.17)$

- Área dada por 1 menos valor literal h, ya que el valor total del área es igual a 1:

$$P(|Z| \leq 1.17) = 1 - P(|Z| \geq 1.17) = 1 - 0.242 = 0.758$$