Conceptos Básicos de Probabilidad

FACULTAD DE INGENIERIA

Por Qué?

- Herramientas básica para construir y analizar modelos matemáticos de fenómenos aleatorios.
- En ciencia e ingeniería, los fenómenos aleatorios describen una amplia variedad de situaciones.
- Fenómenos físicos o naturales que implican incertidumbres.
- Problemas asociados a fenómenos que presentan variabilidad.
- La incertidumbre y la variabilidad están presentes en nuestro modelado de todos los fenómenos reales.

FACULTAD DE INGENIERIA

Conceptos básicos

- **Fenómeno determinístico**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales se obtienen siempre los mismos resultados.

- **Fenómeno aleatorio**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: cuando lanzamos una moneda al aire observando la sucesión de caras y cruces que presentan.

- **Experimento aleatorio.-** Operación que repetimos bajo idénticas condiciones iniciales y no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: lanzamiento de un dado observando la sucesión de números que se presentan $\{1,2,3,4,5,6\}$

- **Suceso elemental**.- Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio; luego un suceso elemental consta de un solo elemento del espacio muestral (**E**). En el ejemplo del dado: $\{1\}$

Conceptos básicos

- **Espacio muestral**.- Conjunto de todos los sucesos elementales del experimento aleatorio y lo designaremos como (**E**). Ejemplo del dado: {1,2,3,4,5,6}

- **Suceso**.- Conjunto formado por uno o más sucesos elementales, es decir, un subconjunto de resultados elementales del experimento aleatorio. Ejemplo del dado: nos interesa saber si el resultado a sido un número impar **A**={1,3,5}

- **Suceso seguro**.- Coincide con el suceso elemental, ya que al realizar el experimento aleatorio se obtendrá con seguridad uno de los posibles resultados o sucesos elementales, y por tanto ocurrirá (**E**).

- Dos **sucesos** se dice que son **iguales**, cuando todo suceso elemental de uno está en el otro, y viceversa.

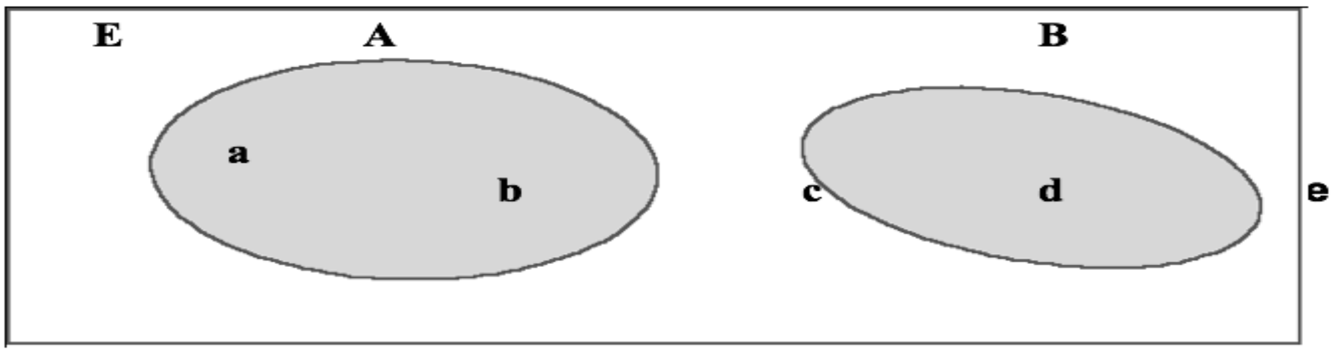
- **Suceso imposible**.- Es el que no tiene ningún elemento del espacio muestral (**E**), y por tanto no ocurrirá nunca, y se representa como ∅ Ejemplo: En el lanzamiento del dado no puede darse el 7.

Conceptos básicos

- **Suceso complementario a un suceso *A*:** Es el suceso que se verifica si, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica **A.** Se acostumbra a denotar con el símbolo $\bar{A}$.

- **Sucesos incompatibles:** Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

$$A = \{a, b\},\ B = \{d, e\}$$



- Si tenemos dos sucesos cualesquiera **A**, **B**: **A** está contenido en **B**, entonces **B** no está contenido en **A**,

$$A \subset B \Rightarrow B \not\subset A$$

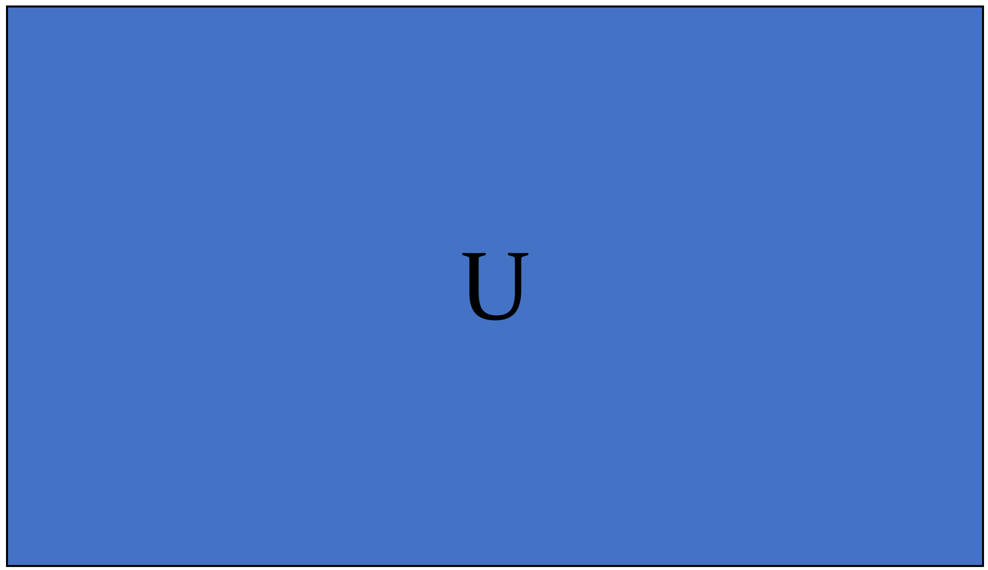
- Si tenemos dos sucesos cualesquiera A, B: donde **A** está contenido en **B** y **B** está contenido en **A**, entonces **A = B.**

$$A, B \,/\, A \subset B \Rightarrow B \subset A \Rightarrow A = B$$

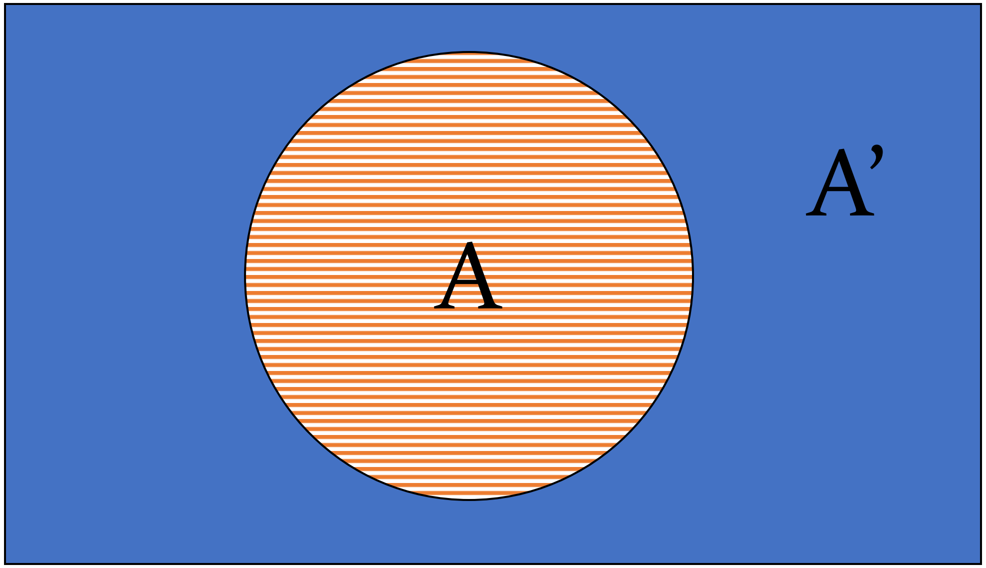
Diagramas de Venn

- John Venn (1834-1923)
- Dibujos y Diagramas utilizados en la Teoría de conjuntos

Conjunto Universal



Conjunto A y Complemento de A



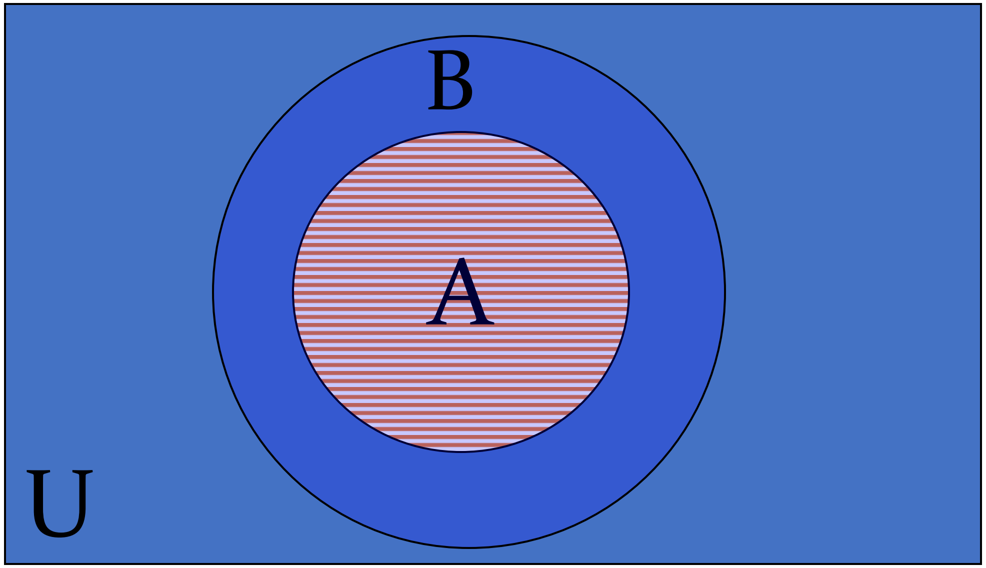
- Para cualquier conjunto A dentro del conjunto universal U, el complemento de A, denotado A’, es el conjunto de elementos en U que no son elementos de A. Esto es:

$$A' = \{x \mid x \in U \;\; y \;\; x \notin A\}$$

Conjunto Vacío

- El complemento del conjunto universal es el conjunto vacío
- $U' = \emptyset$
- No tiene elementos
- Es un subconjunto de todos los conjuntos

Subconjunto de un conjunto



- El conjunto A es un subconjunto del conjunto B, siempre y cuando cada elemento de A también sea elemento de B.

$$A \subseteq B$$

Cuantos subconjuntos hay en un conjunto

- Cualquier conjunto (excepto Ø) tiene por lo menos dos subconjuntos, Ø y el mismo.
- {7,8}
  - Ø, {7}, {8}, {7, 8}
- El numero de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n
- El numero de subconjuntos propios de un conjunto es $2^n - 1$

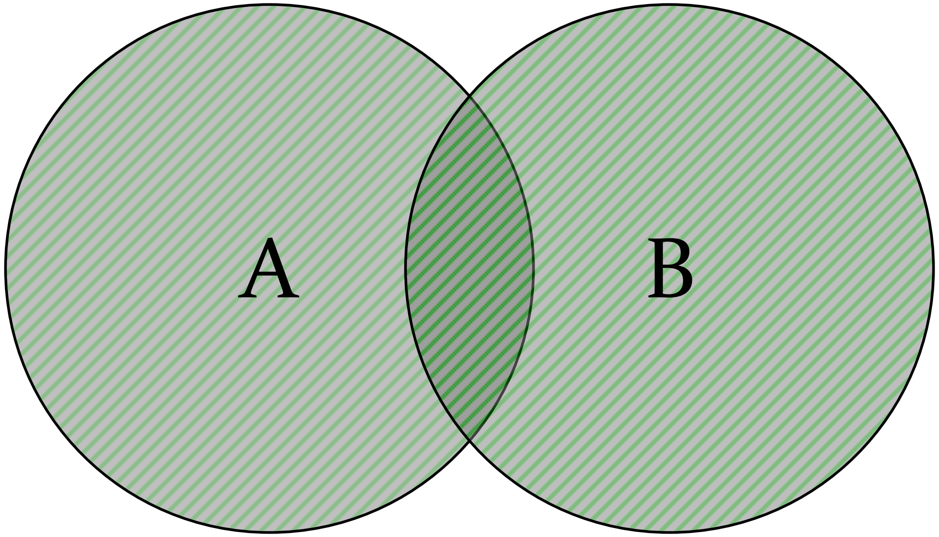
FACULTAD DE INGENIERIA

Determinar el conjunto potencia

- Dado el conjunto A ={5, 6} determina el conjunto potencia P(A) = { }.
- El numero de subconjuntos del conjunto potencia es 2^n. Dado que A consta de 2 elementos, entonces 2^2 es 4 elementos
- P(A) = {{5},{6},{5,6}, Ø}

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIÓN

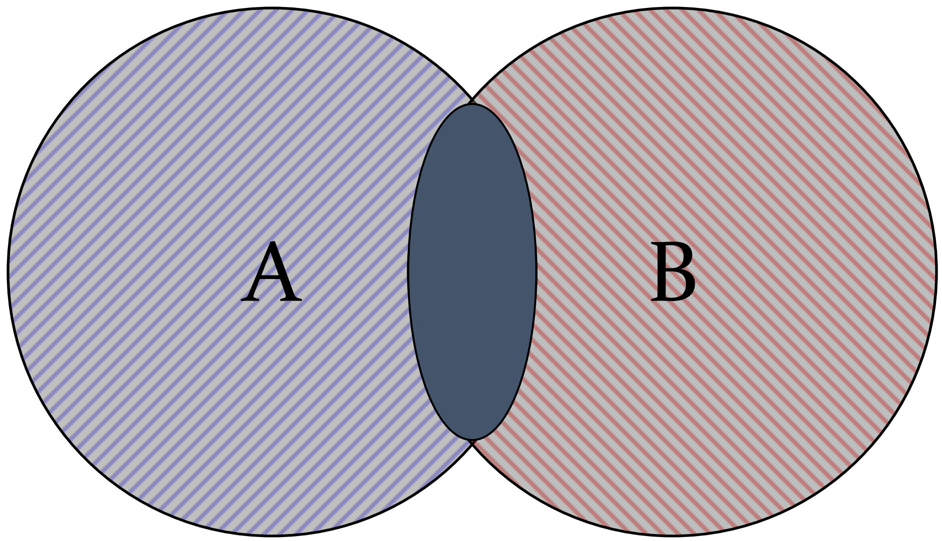


$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \; o \; x \in B\}$$

Ejemplo de unión de conjuntos

$$\{a, b, c, d, e\} \cup \{x, y, z\}$$
$$= \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$$

INTERSECCIÓN



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ y \ x \in B\}$$

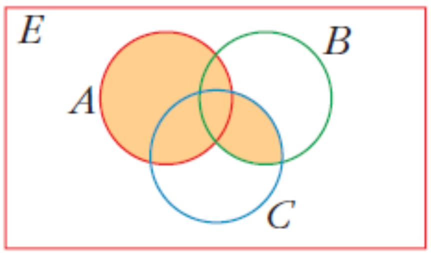
Ejemplo de intersección de conjuntos

$$\{1,2,3,4,5\}\cap\{3,4,5,6,7\}$$
$$=\{3,4,5\}$$

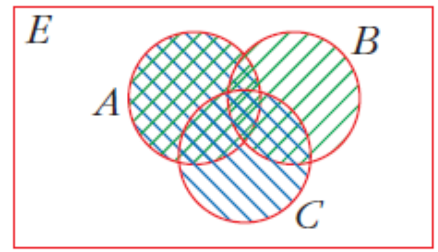
Justifica gráficamente las siguientes igualdades:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **b)** $(A \cup B)' = A' \cap B'$

a)

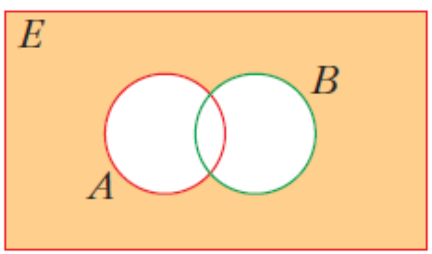


$A \cup (B \cap C)$

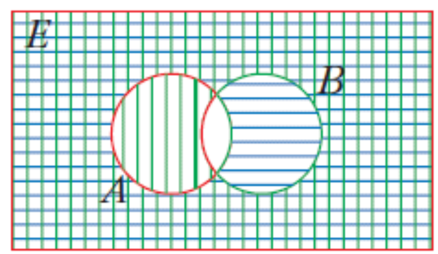


$A \cup B$, $A \cup C$ } $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

b)



$(A \cup B)'$



B', C' } $A' \cap B'$

Propiedades de la unión e intersección de sucesos

	UNION	***INTERSECCION***
1. Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3. Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificativa	$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$	
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

Todo suceso A del espacio de sucesos tiene otro llamado contrario, $\bar{A}$ tal que:

$A \cup \bar{A} = E$ $\qquad$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Los 3 enfoques basicos del estudio de la probabilidad

Probabilidad clásica: Considera un experimento para el que todos los sucesos elementales son equiprobables. Si tenemos K sucesos elementales, entonces la probabilidad de un suceso A es

$$\text{Probabilidad(A) = P(A)} = \frac{1}{K} \times \textit{Tamaño de A}$$

Enfoque frecuentista: Si repetimos el experimento muchas veces, la frecuencia (relativa) con que ocurre el suceso sería una aproximación de la probabilidad

Probabilidad = el valor límite de la frecuencia

Probabilidad subjetiva: Depende de la información que tengamos en ese momento

Probabilidad = creencia o certeza de que ocurra

Los 3 enfoques básicos del estudio de la probabilidad

Probabilidad clásica:

En una caja hay una pelota azul, una verde, una roja, una amarilla y una negra.

¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar con los ojos cerrados una pelota de la caja, esta sea amarilla?

Solución

El evento «A» es sacar una pelota de la caja con los ojos cerrados (si se hace con los ojos abiertos la probabilidad es 1) y que esta sea amarilla.

Solo hay un caso favorable, dado que solo hay una pelota amarilla. Los casos posibles son 5, puesto que hay 5 pelotas en la caja.

Por lo tanto, la probabilidad del evento «A» es igual a P(A) = 1 / 5.

Como se puede observar, si el evento es sacar una pelota azul, verde, roja o negra, la probabilidad también será igual a 1/5. Por lo tanto, este es un ejemplo de probabilidad

Los 3 enfoques básicos del estudio de la probabilidad

Enfoque frecuentista:

Se tiene un dado, el cual se lanza 6 veces al aire, determinar cuál es la Probabilidad frecuencial de que salga la cara que marca 2

Solución

Para dar cumplimiento al planteamiento de este ejercicio, se deberá realizar primero el experimento aleatorio. En consecuencia, se lanza el dado un total de seis veces, y se comienza a anotar los distintos resultados:

Lanzamiento 1: cara del 1
Lanzamiento 2: cara del 2
Lanzamiento 3: cara del 2
Lanzamiento 4: cara del 6
Lanzamiento 5: cara del 6
Lanzamiento 6: cara del 4

Teniendo estos resultados, se procede entonces a determinar la **probabilidad frecuencial de que salga la cara del 2.** Para esto, se divide el número de veces que ha salido, y se divide entre el número de lanzamientos:

P (cuando sale la cara del 2) = 2/6.

P (cuando sale la cara del 2) = 33%

FACULTAD DE INGENIERIA

Los 3 enfoques básicos del estudio de la probabilidad

Enfoque subjetivo:

En este caso, la probabilidad de un evento depende del observador, es decir, depende de lo que el observador conoce del fenómeno en estudio.

Puede parecer un tanto informal y poco seria esta definición de la probabilidad de un evento,

Ejemplo:

¿cuál es la probabilidad de que un cierto equipo de fútbol gane en su próximo partido?

Ciertas circunstancias internas del equipo, las condiciones del equipo rival o cualquier otra condición externa, son elementos que sólo algunas personas conocen y que podrían darnos una idea más exacta de esta probabilidad.

Propiedades de Probabilidad

La probabilidad del complementario de ***A*** es 1 menos la probabilidad de ***A:***

- Prob [$\bar{A}$] = 1 - Prob [***A***].

La probabilidad de la unión de ***A y B*** es igual a la probabilidad de ***A*** más la probabilidad de ***B*** menos la probabilidad de la intersección de ***A y B:***

- Prob [***A U B***] = Prob [***A***] + Prob [***B***] - Prob [***A*** ∩***B***].

Si ***A*** contiene a ***B,*** entonces la probabilidad de ***A*** es menor o igual que la probabilidad de ***B:***

- $A \subset B \Rightarrow$ Prob [***A***] ≤ Prob [***B***]

La probabilidad de ***A*** es menor o igual a ***1:***

- Prob [***A***] ≤ 1.

Operaciones con Probabilidades

SUMA

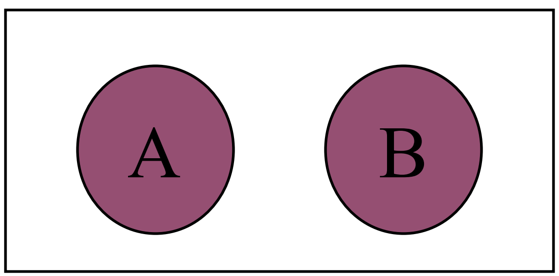
La regla de la Suma se aplica para hallar la probabilidad “AoB” (es decir se SUMA). Y esta regla afirma que:

1. *Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes, habremos de sumar la Probabilidad de suceso A a la Probabilidad del Suceso B.*

2. *Si A y B son sucesos NO mutuamente excluyentes, habremos de sumar la Probabilidad de suceso A a la Probabilidad del Suceso B y restar la probabilidad conjunta de los sucesos A y B.*

Regla de adición para sucesos mutuamente excluyentes

Dos sucesos son mutuamente excluyentes, si no tienen elementos comunes



$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si : $(A \cap B) = \varnothing$

Por lo tanto : $P(A \cap B) = 0$

Ejemplo:

Se extrae una carta de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as o un rey?

$$P(AUR) = P(A) + P(R)$$

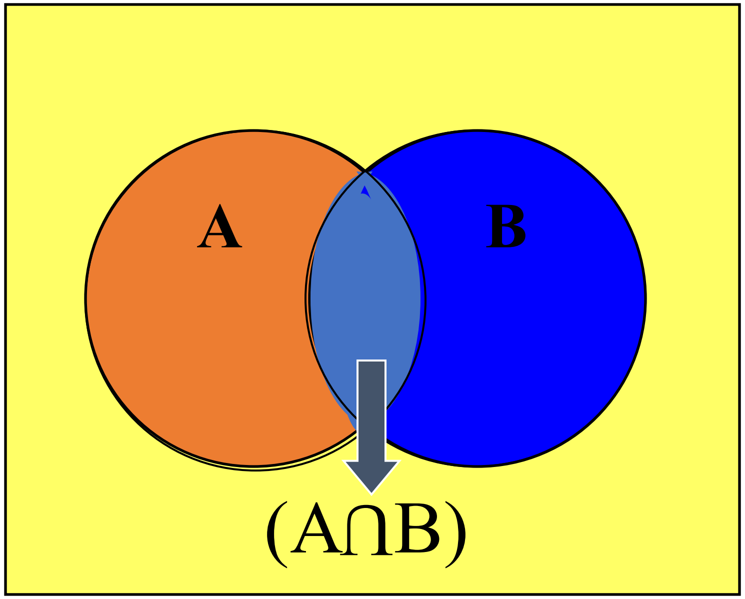
$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52}$$

$$= \frac{8}{52}$$

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(R) = \frac{4}{52}$$

Regla de adición para sucesos no excluyentes



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo:

Un cliente ingresa a una panadería. La probabilidad de que compre (a) pan es 0,60 (b) leche 0,50, y c) pan y leche es 0,30 ¿Cuál es la probabilidad de que compre pan, leche o ambos?.

<u>Datos</u>

$P(P) = 0{,}60$

$P(L) = 0{,}50$

$P\ (P \cap L) = 0{,}30$

$P(P \cup L) = P(P) + P(L) - (P \cap L)$

$P(P \cup L) = 0{,}60 + 0{,}50 - 0{,}30$

$P(P \cup L) = 0{,}80$

FACULTAD DE INGENIERIA

Regla de la multiplicacion

La regla de la Multiplicación para hallar la probabilidad conjunta “AyB” (es decir producto). Y esta regla afirma que:

1. *Si A y B son sucesos independientes, habremos de multiplicar la probabilidad del suceso A por la Probabilidad del suceso B.*

2. *Si A y B son sucesos dependientes habremos de multiplicar la probabilidad del suceso A por la Probabilidad del suceso B siempre que A haya ocurrido ya.*

Probabilidad Condicional

Regla de la multiplicación para sucesos independientes.

Los sucesos A y B se consideran independientes cuando la ocurrencia de uno no influye sobre la probabilidad de ocurrencia del otro.

$$P\left(\mathrm{B}/\mathrm{A}\right) = P(\mathrm{B})$$

Entonces,

$$\Rightarrow P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \bullet P(\mathrm{B})$$

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que en una familia con dos hijos, ambos sean varones?

$$P(\mathrm{V}_1) = 0{,}5$$

$$P(\mathrm{V}_2) = 0{,}5$$

$$P(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) = P(\mathrm{V}_1) \bullet P(\mathrm{V}_2)$$

$$= (0{,}5)\,(0{,}5)$$

$$P(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) = 0{,}25$$

FACULTAD DE INGENIERIA

Regla de la multiplicación para sucesos dependientes.

A partir de

$$P\left(B/_A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Se despeja

$$P(A\cap B)=P(A)\bullet P\left(B/_A\right)$$

Aplicación:

Se sabe que en un lote de discos duros de 50 unidades, hay 4 que no están adecuadamente embalados. Si se extraen al azar 2 discos duros, uno a continuación del otro, ¿cuál es la probabilidad de que ambos se encuentren mal embalados?

$$P(D_1) = \frac{4}{50}$$

$$P\left(D_2 / D_1\right) = \frac{3}{49}$$

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \bullet P\left(D_2 / D_1\right)$$

$$= \frac{4}{50} \bullet \frac{3}{49} = \frac{12}{2450}$$

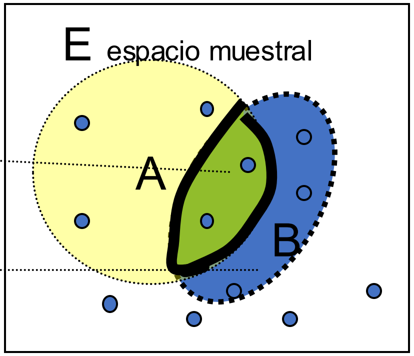
FACULTAD DE INGENIERIA

Probabilidad Condicionada

- Se llama probabilidad de A condicionada a B, o probabilidad de A sabiendo que pasa B:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"tamaño" de uno respecto al otro



- Error frecuentíiiiiiisimo:
  - No confundir probabilidad condicionada con intersección.
  - En ambos medimos efectivamente la intersección, pero…
    - En P(A∩B) con respecto a P(E)=1
    - En P(A|B) con respecto a P(B)

Arboles de probabilidades

Cuando tenemos que hallar las probabilidades de Varios suceso conjuntos, suele ser útil dibujar un árbol de probabilidades, asociadas a un conjunto completo de sucesos específicos. Un Árbol de Probabilidades o Diagrama de Árbol indica todas estas probabilidades asociadas.

Independencia de sucesos

- Sean **A** y **B** dos sucesos del espacio muestral. El suceso **A** se dice **independiente** del suceso **B** si el conocimiento de la ocurrencia de **B** no modifica la probabilidad de aparición de **A**, es decir, si

$$P\,(A/B) = P\,(A) \text{ o } P(A) = P(A/B).$$

- **Propiedad:** Si dos sucesos **A, B** son independientes, entonces siempre se verifica:

$$\textbf{A es independiente de B} \iff \mathbf{P\,(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)}$$

Teorema de Probabilidad Total

En primer lugar, antes de definir el teorema, es necesario definir que es un conjunto completo. Se dice que un conjunto de sucesos A1, A2, A3,….An ∈ E forman un sistema completo si se verifica:

- Son incompatibles dos a dos, es decir $A_i \cap A_j \neq 0, \forall_{i,j}$
- Que la unión de todos ellos es el espacio muestral, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

Con todo esto se define el teorema de la **Probabilidad Total** como:

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea ***B*** un suceso para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso ***B*** viene dada por:

$$\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

INGENIERIA

Teorema de Bayes

- *Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B \mid A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i \mid B)$ viene dada por la expresión:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$