CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDAD

1.- POR QUE?

La teoría matemática de la probabilidad nos brinda las herramientas básicas para construir y analizar modelos matemáticos de fenómenos aleatorios.

Al estudiar un fenómeno aleatorio, nos enfrentamos a un experimento cuyo resultado no es predecible de antemano. Los experimentos de este tipo que inmediatamente nos vienen a la mente son los que surgen en los juegos de azar. De hecho, el desarrollo más temprano de la teoría de la probabilidad en los siglos XV y XVI estuvo motivado por problemas de este tipo (por ejemplo, véase Todhunter, 1949).

En ciencia e ingeniería, los fenómenos aleatorios describen una amplia variedad de situaciones. En general, se pueden agrupar en dos grandes clases. La primera clase trata de fenómenos físicos o naturales que implican incertidumbres. La incertidumbre entra en la formulación de problemas a través de la complejidad, de nuestra falta de comprensión de todas las causas y efectos y de la falta de información.

La segunda clase de problemas ampliamente estudiados mediante modelos probabilísticos se refiere a los que presentan variabilidad. Consideremos, por ejemplo, un problema de flujo de tráfico en el que se desea saber el número de vehículos que cruzan un determinado punto de una carretera en un intervalo de tiempo específico. Este número varía de manera impredecible de un intervalo a otro, y esta variabilidad refleja el comportamiento variable del conductor y es inherente al problema. Esta propiedad nos obliga a adoptar un punto de vista probabilístico, y la teoría de la probabilidad proporciona una herramienta poderosa para analizar problemas de este tipo.

Es seguro decir que la incertidumbre y la variabilidad están presentes en nuestro modelado de todos los fenómenos reales, y es natural ver que el modelado y el análisis probabilísticos ocupan un lugar central en el estudio de una amplia variedad de temas en ciencia e ingeniería. No hay duda de que en el futuro veremos una dependencia cada vez mayor del uso de formulaciones probabilísticas en la mayoría de las disciplinas científicas.

2.- INTRODUCCIÓN

La **teoría de la probabilidad** pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo. Por otra parte, cuando aplicamos las **técnicas** estadísticas al análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la confiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las estimaciones realizadas.

El objetivo del Cálculo de Probabilidades es el estudio de métodos de análisis del comportamiento de fenómenos aleatorios.

En la actividad diaria nos encontramos con ciertos tipos de fenómenos que se pueden reproducir un gran número de veces, en condiciones similares dando lugar a un conjunto de dos o más posibles resultados. Estos fenómenos pueden ser de dos tipos: determinísticos y aleatorios.

2.1.- Conceptos básicos

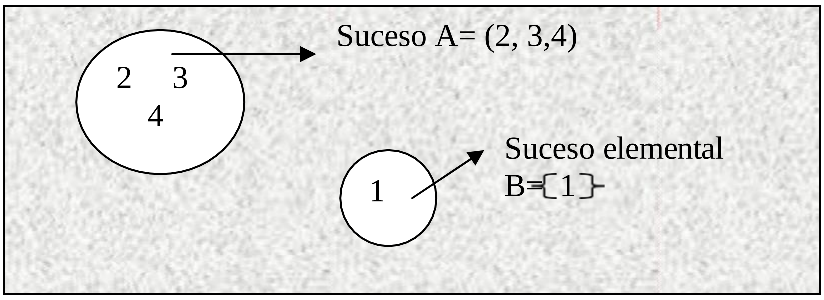
Con ellos vamos a dar una serie de conceptos para poder desarrollar este tema y los sucesivos.

- **Fenómeno determinístico**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales se obtienen siempre los mismos resultados.

- **Fenómeno aleatorio**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: cuando lanzamos una moneda al aire observando la sucesión de caras y cruces que presentan.

- **Experimento aleatorio.-** Operación que repetimos bajo idénticas condiciones iniciales y no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: lanzamiento de un dado observando la sucesión de números que se presentan $\{1,2,3,4,5,6\}$

- **Suceso elemental**.- Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio; luego un suceso elemental consta de un solo elemento del espacio muestral (**E**). En el ejemplo del dado: $\{1\}$



- **Espacio muestral**.- Conjunto de todos los sucesos elementales del experimento aleatorio y lo designaremos como (**E**). Ejemplo del dado: $\{1,2,3,4,5,6\}$

- **Suceso**.- Conjunto formado por uno o más sucesos elementales, es decir, un subconjunto de resultados elementales del experimento aleatorio. Ejemplo del dado: nos interesa saber si el resultado a sido un número impar **A**=$\{1,3,5\}$

- **Suceso seguro**.- Coincide con el suceso elemental, ya que al realizar el experimento aleatorio se obtendrá con seguridad uno de los posibles resultados o sucesos elementales, y por tanto ocurrirá (**E**).

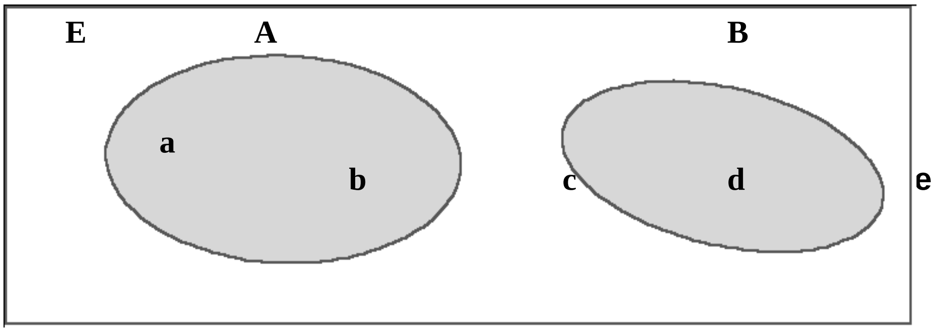
- Dos **sucesos** se dice que son **iguales**, cuando todo suceso elemental de uno está en el otro, y viceversa.

- **Suceso imposible**.- Es el que no tiene ningún elemento del espacio muestral (**E**), y por tanto no ocurrirá nunca, y se representa como $\emptyset$ Ejemplo: En el lanzamiento del dado no puede darse el 7.

- **Suceso complementario a un suceso *A*:** Es el suceso que se verifica si, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica **A.** Se acostumbra a denotar con el símbolo **Ā.**

- **Sucesos incompatibles:** Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

A = {a, b}, B = {d, e}



- Si tenemos dos sucesos cualesquiera **A**, **B**: **A** está contenido en **B**, entonces **B** no está contenido en **A,**

$$\mathbf{A \subset B \;\Rightarrow\; B \not\subset A}$$

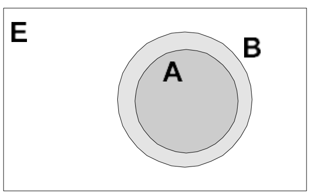
- Si tenemos dos sucesos cualesquiera A, B: donde **A** está contenido en **B** y **B** está contenido en **A**, entonces **A = B.**

$$\mathbf{A, B\ /\ A \subset B\ \Rightarrow B \subset A \Rightarrow\quad A = B}$$

2.2.- Operaciones con sucesos

Al ser los sucesos aleatorios nada más que subconjuntos de un conjunto ***E*** (espacio muestral), podemos aplicarles las conocidas operaciones con conjuntos, como son la unión, intersección y diferencia:

o **Suceso contenido en otro.-** Un suceso **A** se dice que está **contenido** o **inducido** en otro **B** si siempre que se verifica **A** se verifica **B**. Se representa **A ⊂ B**.



Ejemplo: Considerando el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado, si designamos por:

- A= que aparezca el 2 ó el 4 = $\{2,4\}$
- B= que aparezca un número par: $\{2,4,6\}$

El suceso **A ⊂ B**, pues los resultados o sucesos elementales 2 y 4 de A, pertenecen a B. Diremos también que A **implica** a B y lo denotaremos **A ⟹ B.**

- **Igualdad de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B, diremos que son **iguale**s, si siempre que ocurre el suceso A también ocurre el suceso B, y siempre que ocurre el suceso B ocurre el suceso A, y lo indicaremos por **A = B**. Es decir, si se verifica:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \subset \mathbf{A}\end{array}\right. \iff \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Ejemplo: Sean los sucesos:

A = obtener un número par al lanzar un dado = $\{2,4,6\}$

B = obtener un múltiplo de 2 = $\{2,4,6\}$

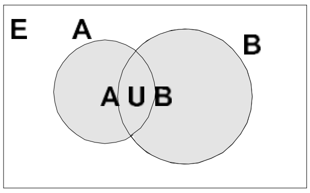
Aquí se verifica que:

A ⊂ B pues siempre que ocurre A ocurre B
$\boldsymbol{B}$ ⊂ **A** pues siempre que ocurre B ocurre A

Luego A = B.

- **Diferencia de sucesos.-** Dados dos sucesos aleatorios $A, B \in E$, se llama ***suceso diferencia*** de ***A y B*** y se representa mediante ***A/B***, o bien, ***A-B*** al suceso aleatorio formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a ***A***, pero no a ***B.***

- **Unión de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B se llama **unión de A y B**, y se representa por A∪B, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B, es decir, a todos los elementos que están en A ó están en B.



Ejemplo: Sean los sucesos:

A = obtener el lanzamiento de un dado un número impar = $\{1,3,5\}$
B = obtener un número mayor que 4 = $\{5,6\}$

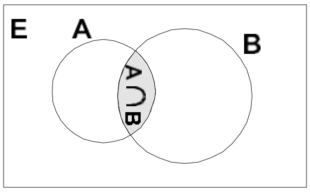
El suceso unión será:

A ∪B = $\{1,3,5\} \cup \{5,6\} = \{1,3,5,6\}$

O sea, obtener un 1, un 3, un 5, ó un 6 en el lanzamiento del dado.

- **Intersección de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B, se llama suceso **intersección de A y B**, y se representa por A ∩ B, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente A y B.

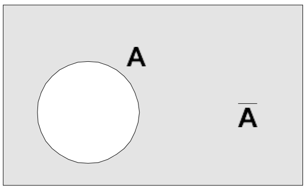
Ejemplo: Utilizando el ejemplo de la unión, la intersección viene dada por:



- **Sucesos Incompatibles.-** Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman **sucesos incompatibles**. Obsérvese que un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

$$A \cap B = \emptyset$$

- **Sucesos Complementarios.-** Dado un suceso **A**, se llama **suceso contrario** o **complementario** de **A**, y se representa por **$\bar{A}$**, al suceso que se realiza cuando no se realiza **A** y recíprocamente.

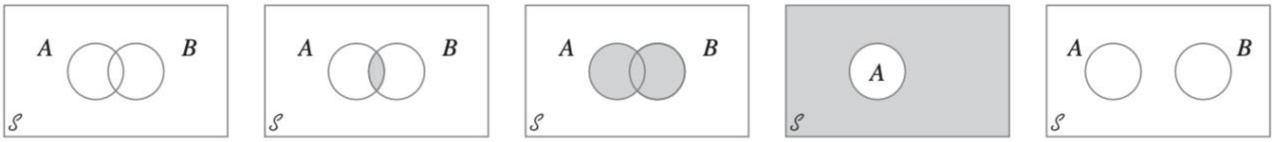


El suceso contrario de **E** es ∅ y recíprocamente.

$$\bar{A} = E - A.$$

Diagramas de Venn:

Con diagramas de Venn se obtiene una representación pictórica de eventos y manipulaciones con eventos. Para construir un diagrama de Venn, se traza un rectángulo cuyo interior representará el espacio muestral S. En tal caso cualquier evento A se representa como el interior de una curva cerrada (a menudo un círculo) contenido en **E**. La figura muestra ejemplos de diagramas de Venn.

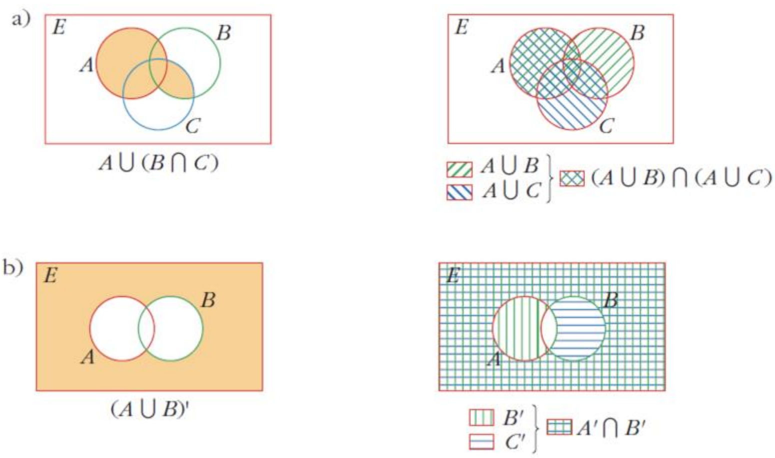


a) Diagrama de Venn de los eventos A y B b) La región sombreada es $A \cap B$ c) La región sombreada es $A \cup B$ d) La región sombreada es A' e) Eventos mutuamente excluyentes

Caso Practico

Justifica gráficamente las siguientes igualdades:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **b)** $(A \cup B)' = A' \cap B'$



2.3.- Propiedades de la unión e intersección de sucesos

Seguidamente se presentan una serie de propiedades que verifican tanto la unión como la intersección de dos o más sucesos. Tales propiedades son comunes a ambas, como se muestran en la siguiente tabla:

	UNION	***INTERSECCION***
1. Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3. Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificativa	$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$	
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Todo suceso A del espacio de sucesos tiene otro llamado contrario, $\overline{A}$ tal que:	$A \cup \overline{A} = E$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$

De estas propiedades surgen las siguientes consecuencias inmediatas:

i) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

ii) $A \cap E = A$, $A \cup E = E$

iii) Leyes de **Morgan:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.- ENFOQUES DE PROBABILIDAD

La probabilidad de un evento A es un número real en el intervalo (0, 1) que se denota por P(A) y representa una medida de la frecuencia con la que se observa la ocurrencia de este evento cuando se efectúa el experimento aleatorio en cuestión. Existen definiciones específicas de la probabilidad.

Veremos tres enfoques: clásica, frecuentista y subjetiva, a efectos del curso **utilizaremos luego solo el enfoque clásico** para los cálculos de probabilidad.

Probabilidad clásica

Históricamente, esta forma de calcular probabilidades es una de las primeras en utilizarse; se aplicó con bastante éxito en problemas de juegos de azar y ayudó a sentar las bases para construir la teoría matemática. Su definición es elemental y su aplicación está restringida a situaciones cuando se satisfacen ciertas condiciones en el experimento aleatorio.

Sea A un subconjunto de un espacio muestral E finito. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente

P(A) = #A / #E

en donde el símbolo #A denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A.

O sea si un suceso puede ocurrir de N maneras mutuamente excluyentes e igualmente probables, y m de ellas poseen una característica A

$$P(A) = \frac{m}{N} = \frac{Nro.de\ casos\ favorables\ a\ A}{Nro.de\ casos\ posibles}$$

Ejemplo:

En una caja hay una pelota azul, una verde, una roja, una amarilla y una negra. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar con los ojos cerrados una pelota de la caja, esta sea amarilla?

Solución

El evento «A» es sacar una pelota de la caja con los ojos cerrados (si se hace con los ojos abiertos la probabilidad es 1) y que esta sea amarilla.

Solo hay un caso favorable, dado que solo hay una pelota amarilla. Los casos posibles son 5, puesto que hay 5 pelotas en la caja.

Por lo tanto, la probabilidad del evento «A» es igual a P(A) = 1 / 5.

Como se puede observar, si el evento es sacar una pelota azul, verde, roja o negra, la probabilidad también será igual a 1/5. Por lo tanto, este es un ejemplo de probabilidad clásica.

Ejemplo:

En un salón de clases hay 8 niños y 8 niñas. Si la maestra escoge al azar un estudiante de su salón, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido sea una niña?

Solución

El evento «A» es escoger un estudiante al azar. En total hay 16 estudiantes, pero como se quiere escoger una niña, entonces hay 8 casos favorables.

Por lo tanto P(A) = 8/16 = 1/2.

A esta forma de definir la probabilidad también se le conoce con el nombre de probabilidad de Laplace, en honor del astrónomo y matemático francés Pierre-Simon Laplace, quien estableció de una manera sistemática y rigurosa los principios y propiedades de esta forma de calcular probabilidades.

Probabilidad frecuentista

Suponga que se realizan n repeticiones de un cierto experimento aleatorio y que se registra el número de veces que ocurre un determinado evento A. Esta información puede ser usada de la siguiente forma para definir la probabilidad de A.

Sea s el número de ocurrencias de un evento A en N realizaciones de un experimento aleatorio. La probabilidad frecuentista del evento A se define como el límite

$$\lim_{N \to \infty} \frac{s}{N} = P(s)$$

En este caso, debemos hacer notar que no es humanamente posible llevar a cabo una infinidad de veces el experimento aleatorio y tampoco podemos garantizar, por ahora, la existencia de tal límite. Por lo tanto, mediante la definición anterior, no es posible encontrar de manera exacta la probabilidad de un evento cualquiera, aunque permite tener una aproximación empírica del valor de P(A), es decir,

P (A) = s / N

Las limitaciones mencionadas hacen que esta definición de probabilidad no sea enteramente formal, pero, sin duda, tiene la ventaja de que su forma de cálculo hace evidente la interpretación de la probabilidad como una medida de la frecuencia con la que ocurre un evento.

Ejemplo.

Se tiene un dado, el cual se lanza 6 veces al aire, determinar cuál es la Probabilidad frecuencial de que salga la cara que marca 2

Solución

Para dar cumplimiento al planteamiento de este ejercicio, se deberá realizar primero el experimento aleatorio. En consecuencia, se lanza el dado un total de seis veces, y se comienza a anotar los distintos resultados:

Lanzamiento 1: cara del 1
Lanzamiento 2: cara del 2
Lanzamiento 3: cara del 2
Lanzamiento 4: cara del 6
Lanzamiento 5: cara del 6
Lanzamiento 6: cara del 4

Teniendo estos resultados, se procede entonces a determinar la **probabilidad frecuencial de que salga la cara del 2.** Para esto, se divide el número de veces que ha salido, y se divide entre el número de lanzamientos:

P (cuando sale la cara del 2) = 2/6

P (cuando sale la cara del 2) = 33%

Probabilidad subjetiva

En este caso, la probabilidad de un evento depende del observador, es decir, depende de lo que el observador conoce del fenómeno en estudio. Puede parecer un tanto informal y poco seria esta definición de la probabilidad de un evento, sin embargo, en muchas situaciones es necesario recurrir a un experto para tener por lo menos una idea vaga de cómo se comporta el fenómeno de nuestro interés y saber si la probabilidad de un evento es alta o baja. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que un cierto equipo de fútbol gane en su próximo partido? Ciertas circunstancias internas del equipo, las condiciones del equipo rival o cualquier otra condición externa, son elementos que sólo algunas personas conocen y que podrían darnos una idea más exacta de esta probabilidad.

4.- PROPIEDADES DE PROBABILIDAD

Llamamos espacio probabilística a la terna formada por un espacio muestral, ***E;*** el álgebra de sucesos, ***A̧,*** y una probabilidad, **P**, es decir a ***(E, A̧, P).***

Sus propiedades son:

1) La probabilidad del complementario de ***A*** es 1 menos la probabilidad de ***A:***

$$\text{Prob}\,[\bar{A}] = 1 - \text{Prob}\,[A].$$

2) La probabilidad de la unión de ***A y B*** es igual a la probabilidad de ***A*** más la probabilidad de ***B*** menos la probabilidad de la intersección de ***A y B:***

$$\text{Prob}\,[A \cup B] = \text{Prob}\,[A] + \text{Prob}\,[B] - \text{Prob}\,[A \cap B].$$

3) La probabilidad del suceso vacío es 0:

$$\text{Prob}\,[\emptyset] = 0$$

4) Si ***A*** contiene a ***B,*** entonces la probabilidad de ***A*** es menor o igual que la probabilidad de ***B:***

$$A \subset B \Rightarrow \text{Prob}\,[A] \leq \text{Prob}\,[B]$$

5) La probabilidad de ***A*** es menor o igual a ***1:***

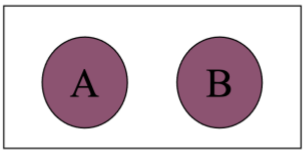
$$\text{Prob}\,[A] \leq 1.$$

5.- OPERACIONES CON PROBABILIDADES

Suma

La regla de la Suma se aplica para hallar la probabilidad “AoB” (es decir se SUMA). Y esta regla afirma que:

1. *Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes, habremos de sumar la Probabilidad de suceso A a la Probabilidad del Suceso B.*



$$\Rightarrow \boxed{P(AUB) = P(A) + P(B)}$$

$$\text{Si : } (A \cap B) = \varnothing$$
$$\text{Por lo tanto : } P(A \cap B) = 0$$

Caso Práctico:

Se extrae una carta de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as o un rey?

$$P(A) = \frac{4}{52}$$
$$P(R) = \frac{4}{52}$$

$$\begin{aligned} P(AUR) &= P(A) + P(R) \\ &= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} \\ &= \frac{8}{52} \end{aligned}$$

2. *Si A y B son sucesos NO mutuamente excluyentes, habremos de sumar la Probabilidad de suceso A a la Probabilidad del Suceso B y restar la probabilidad conjunta de los sucesos A y B.*

$$\boxed{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Caso práctico:

Un cliente ingresa a una panadería. La probabilidad de que compre (a) pan es 0,60 (b) leche 0,50, y c) pan y leche es 0,30 ¿Cuál es la probabilidad de que compre pan, leche o ambos?

Datos
P(P) = 0,60
P(L) = 0,50
P = 0,30

P(PUL) = P(P) + P(L) - P(PUL) = 0,60 + 0,50 - 0,30
P(PUL) = 0,80

Multiplicación

1. *Si A y B son sucesos independientes, habremos de multiplicar la probabilidad del suceso A por la Probabilidad del suceso B.*

$$P\left(B/_{A}\right) = P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Caso Práctico.

¿Cuál es la probabilidad de que, en una familia con dos hijos, ambos sean varones?

$$P(V_1) = 0{,}5 \qquad P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \bullet P(V_2)$$

$$P(V_2) = 0{,}5$$

$$= (0{,}5)(0{,}5)$$

$$P(V_1 \cap V_2) = 0{,}25$$

2. *Si A y B son sucesos dependientes habremos de multiplicar la probabilidad del suceso A por la Probabilidad del suceso B siempre que A haya ocurrido ya.*

A partir de $$P\left(B/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se despeja

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P\left(B/_{A}\right)$$

Caso Práctico:

Se sabe que, en un lote de discos duros de 50 unidades, hay 4 que no están adecuadamente embalados. Si se extraen al azar 2 discos duros, uno a continuación del otro, ¿cuál es la probabilidad de que ambos se encuentren mal embalados?

$$P(D_1) = \frac{4}{50}$$

$$P(D_2/D_1) = \frac{3}{49}$$

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \bullet P(D_2/D_1)$$

$$= \frac{4}{50} \bullet \frac{3}{49} = \frac{12}{2450}$$

6.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

Hasta ahora hemos visto el concepto de probabilidad partiendo de que la única información que tenemos sobre el experimento es el espacio muestral. Sin embargo, en ocasiones se conoce que un determinado suceso ha ocurrido. ¿Modificará esta información adicional la probabilidad de que ocurra otro suceso?. Veremos que generalmente sí. A partir de esta idea surge la idea de probabilidad condicionada, que se define:

Sea un espacio probabilístico y un suceso **B**, tal que P(B) ≠ 0, entonces se define la probabilidad de que ocurra **A** si antes ha ocurrido **B**, como:

$$P(B/A) = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \text{si } P(B) \neq O$$

Análogamente podemos definir **P(A/B)** como

$$P(A/B) = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P}(B)} \quad \text{si } P(A) \neq O$$

De las definiciones anteriores se deducen claramente las relaciones siguientes: siguientes:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$

$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$

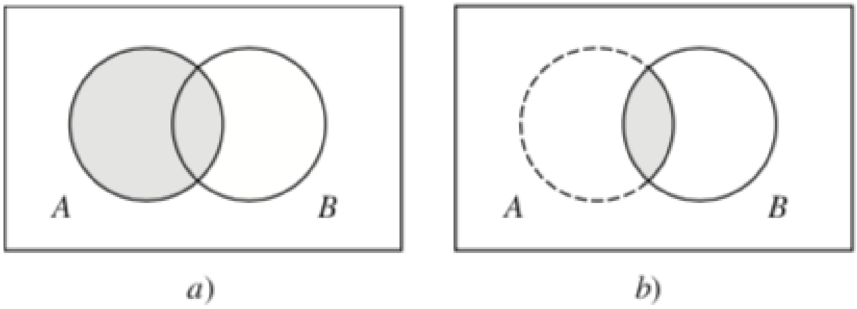
$P(A/B).\ P(B)=P(B/A).\ P(A)$

$$\frac{P(A/B)}{P(B/A)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

$\boldsymbol{P(A/A)=1}$.

Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ son independientes $P(A\cap B)=0$, entonces: $\boldsymbol{P(A/B)=P(B/A)=0}$.

La figura presenta diagramas de Venn para ilustrar la idea de la probabilidad condicional.



a) El diagrama representa la probabilidad incondicional *P*(*A*). *P*(*A*) se muestra al considerar el evento *A* en proporción con todo el espacio muestral, el cual se representa por el rectángulo.

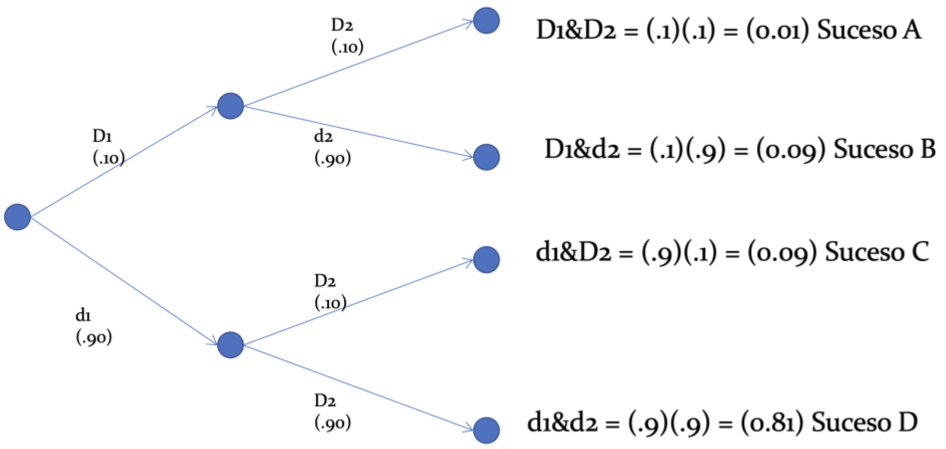
b) El diagrama representa la probabilidad condicional *P*(*A*|*B*). Puesto que se sabe que ocurre el evento *B*, ahora éste será el espacio muestral. Para que el evento *A* ocurra, el resultado debe estar en la intersección *A* ∩ *B*. Por tanto, la probabilidad condicional *P*(*A*|*B*) se muestra al considerar la intersección *A* ∩ *B* en proporción con todo el evento *B*.

Arbol de Probabilidades:

Cuando tenemos que hallar las probabilidades de Varios suceso conjuntos, suele ser útil dibujar un árbol de probabilidades, asociadas a un conjunto completo de sucesos específicos. Un Árbol de Probabilidades o Diagrama de Árbol indica todas estas probabilidades asociadas.

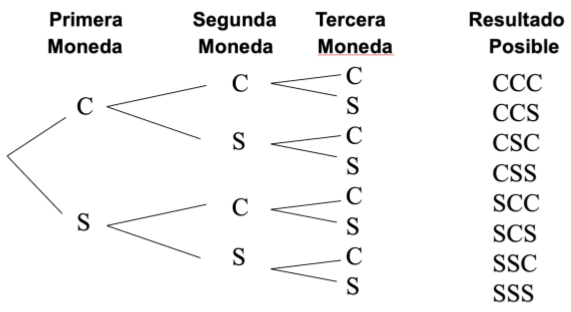
Caso práctico 1:

Todas las grandes empresas tienen departamentos de control de calidad cuya función principal es garantizar que sus productos cumplan determinadas especificaciones de producción. El diagrama soporta un índice de defectos del 10%. Es decir, el 10% de las unidades producidas en la fabrica no cumplen las especificaciones mínimas. Entonces P(D) = 0.10 y P(d) =0.90.



Caso Práctico 2:

Se lanzan tres monedas simultáneamente. Los ochos resultados posibles de este experimento pueden detallarse de manera conveniente mediante un diagrama de árbol:



Ω ={CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS}

7.- INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Sean **A** y **B** dos sucesos del espacio muestral. El suceso **A** se dice **independiente** del suceso **B** si el conocimiento de la ocurrencia de **B** no modifica la probabilidad de aparición de **A**, es decir, si

$$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(A) = P(A/B).$$

Propiedad: Si dos sucesos **A, B** son independientes, entonces siempre se verifica:

$$\textbf{A es independiente de B} \iff \mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

De la definición y de esta propiedad se deduce que si los sucesos *A* y *B* son independientes, se verifica:

- Los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes.
- Los sucesos $\overline{A}$ y B son independientes.
- Los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.
- Decimos que ***n*** sucesos son independientes si se verifica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) .$$

Caso práctico 1:

Se consideran dos sucesos, *A* y *B*, asociados a un experimento aleatorio con $P(A)=0.7$; $P(B)=0.6$; $P(\overline{A} \cup \overline{B})=0.58$. ¿Son independientes *A* y *B*?

Para ver si son independientes, comprobaremos si $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(\overline{A} \cup \overline{\mathbf{B}}) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$$

Por tanto, $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{\mathbf{B}}) = 1 - 0.58 = 0.42$

Por otro lado, $P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

Luego, *A* y *B* son independientes, pues $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.42$

Caso práctico 2:

En una baraja de cartas hemos suprimido varias de ellas, entre los que quedan se verifican las siguientes probabilidades:

- Probabilidad de obtener un rey: 0,15
- Probabilidad de obtener una carta que sea bastos: 0,30
- Probabilidad de obtener una carta que no sea ni rey ni

bastos: 0,6 Calcular:

- ¿Está entre ellas el rey de bastos?, caso afirmativo indicar su probabilidad.-
- ¿Cuántas cartas hay en la baraja?

$$\text{P (ni Rey ni Bastos)} = P\left(\overline{\mathrm{Re}\,y} \cap \overline{Bastos}\right) = 0{,}6 \Rightarrow$$
$$P(\mathrm{Re}\,y \cup Bastos) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$
$$P(\mathrm{Re}\,y \cup Bastos) = P(\mathrm{Re}\,y) + P(Bastos) - P(\mathrm{Re}\,y \cap Bastos) \Rightarrow$$
$$0{,}4 = 0{,}15 + 0{,}3 - P(\mathrm{Re}\,y \cap Bastos) \Rightarrow$$
$$P(\mathrm{Re}\,y \cap Bastos) = 0{,}15 + 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}05$$

Por lo que al ser mayor que cero, indica que está el rey de bastos, con una probabilidad de 0,05.-

Se pasa 0,05 en forma de fracción:

$$0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Lo que indica que si la probabilidad de sacar una carta (el rey de bastos) es de 1 entre 20, quiere decir que el número total de cartas en la baraja es de 20 .

8.- TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

En primer lugar, antes de definir el teorema, es necesario definir que es un conjunto completo. Se dice que un conjunto de sucesos A1, A2, A3,….An $\in E$ forman un sistema completo si se verifica:

- Son incompatibles dos a dos, es decir $A_i \cap A_j \neq 0, \forall_{i,j}$
- Que la unión de todos ellos es el espacio muestral, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

Con todo esto se define el teorema de la **Probabilidad Total** como:

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea ***B*** un suceso para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso ***B*** viene dada por:

$$\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

Caso Práctico 1:

Se tienen dos urnas, la nº1 tiene 3 bolas blancas y 2 negras, la nº2 tiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que sea blanca.

Sea A_1: “elegir la urna nº1” A_2: “elegir la urna nº2” B: “extraer bola blanca”

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 1/2 \cdot 3/5 + 1/2 \cdot 2/5 = 1/2$.

Caso Práctico 2:

Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primero línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

Solución:

Para obtener la solución definimos el suceso "sufrir una avería" (*Av*) puede producirse en las tres líneas, (L_1, L_2, L_3). Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

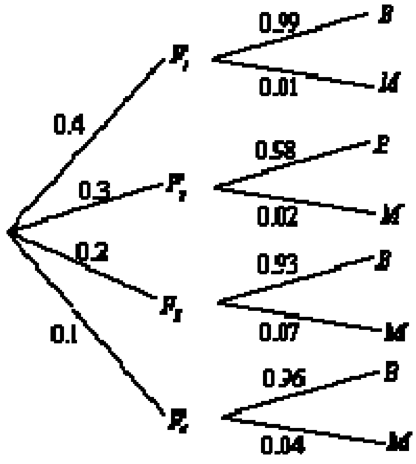
$P(Av) = P(L_1) \cdot P(Av/L_1) + P(L_2) \cdot P(Av/L_2) + P(L_3) \cdot P(Av/L_3) =$
$= 0.6 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.01 =$
$= 0.012 + 0.012 + 0.001 = 0.025$

Caso práctico 3:

Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro fábricas: F_1, F_2, F_3 y F_4. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada una es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada una es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Solución:

Llamando *M* = "el producto está defectuosamente envasado", se tiene que este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:



$$P(M) = P(F_1) \cdot P(M/F_1) + P(F_2) \cdot P(M/F_2) + P(F_3) \cdot P(M/F_3) + P(F_4) \cdot P(M/F_4) =$$
$$= 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.04 =$$
$$= 0.004 + 0.006 + 0.014 + 0.004 = 0.028$$

9.- TEOREMA DE BAYES

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces:

$$\mathbf{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)} = \frac{\mathit{P}(P(A_i) \cdot P(B/A_i))}{\mathit{P(B)}}, i = 1,2,\ldots, n}$$

Caso Práctico:

Una empresa que fabrica envases dispone de tres máquinas A, B y C, que producen envases para botellas de agua. Se sabe que la máquina A produce un 40% de la cantidad total, la máquina B un 30% , y la máquina C un 30%. También se sabe que cada máquina produce envases defectuosos. De tal manera que la máquina A produce un 2% de envases defectuosos sobre el total de su producción, la máquina B un 3%, y la máquina C un 5%.

1.Si un envase ha sido fabricado por la fábrica de esta empresa en Estados Unidos ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

2. Si se adquiere un envase y este es defectuoso ¿Cuáles es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A?¿Y por la máquina B?¿Y por la máquina C?

Entonces:
P(A) = 0,40 **P(D/A) =** 0,02
P(B) = 0,30 **P(D/B) =** 0,03
P(C) = 0,30 **P(D/C) =** 0,05

Se calcula la probabilidad total. Ya que, a partir los diferentes sucesos, calculamos la probabilidad de que sea defectuoso.

P(D) =[P(A) x P(D/A)] + [P(B) x P(B/A)] + [P(C) x P(C/A)] = [0,4 x 0,02] + [0,3 x 0,03] + [0,3 x 0,05] = 0,032

Expresado en porcentaje, diríamos que la probabilidad de que un envase fabricado por la fábrica de esta empresa en Estados Unidos sea defectuoso es del 3,2%.

Aquí se utiliza el teorema de Bayes.
Tenemos información previa, es decir, sabemos que el envase es defectuoso.
Claro que, sabiendo que es defectuoso, queremos saber cual es la probabilidad de que se haya producido por una de las máquinas.

P(A/D) = [P(A) x P(D/A)] / P(D) = [0,40 x 0,02] / 0,032 = 0,25
P(B/D) = [P(B) x P(D/B)] / P(D) = [0,30 x 0,03] / 0,032 = 0,28
P(C/D) = [P(C) x P(D/C)] / P(D) = [0,30 x 0,05] / 0,032 = 0,47

Sabiendo que un envase es defectuoso, la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A es del 25%, de que haya sido producido por la máquina B es del 28% y de que haya sido producido por la máquina C es del 47%.

Casos Prácticos Resueltos en Clase

Caso 1:

Se analizan las matriculas de clases de 120 estudiantes.
Se ha encontrado que:
30 de los estudiantes no cursan Mecánica Aplicada, Química o Computación.
15 de ellos cursan únicamente Mecánica Aplicada.
25 de ellos cursan Química y Computación pero no Mecánica Aplicada.
20 de ellos cursan Mecánica Aplicada y Computación pero no Química.
10 de ellos toman los tres de Mecánica Aplicada, Química y Computación.
Un total de 45 de ellos cursan Química, y 5 de ellos cursan únicamente Química.
a) ¿Cuántos de los estudiantes cursan Mecánica Aplicada y Química pero no Computación?
b) ¿Cuántos de los estudiantes cursan solo Computación?
c) ¿Cuál es el número total de estudiantes que cursan Computación?
d) Si se elige al azar un estudiante entre los que no cursan ni Química ni Computación, ¿cuál es la probabilidad de que no cursen Mecánica Aplicada?
e) Si uno de los estudiantes que cursa al menos dos de los tres cursos es elegido en aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que tome los tres cursos?

Caso 2:

Una fábrica que produce material para la construcción tiene 3 máquinas, a las que les denomian A que produce tabiques, B que produce adoquines, y C que produce losetas.
La máquina A producce el 50% de la producción total de la fábrica, la B el 30% y la C el 20%.
Los porcentajes de artículos defectuosos producidos por cada máquina son respectivamente 3%, 4% y 5%.

Si se selecciona un artículo al azar y se observa que es defectuoso, encontrar la probabilidad que sea un tabique.

Caso 3:

A un congreso asisten 100 personas de las cuales 65 son hombres y 35 son mujeres. Se sabe que el 10% de los hombres y el 6% de las mujeres son especialistas en Computación.

Si se selecciona al azar un especialista en Computación: ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?