

# Señales Aleatorias y Modulación

## Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

19 de noviembre de 2021

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Pregunta 1 [7 pts.]

- (a) Hacer el diagrama de bloques del modelo de canal general explicando brevemente cada componente.
- (b) Suponer que se coloca un repetidor analógico real igual al receptor, ambos con ganancias que compensan las pérdidas de la sección previa de canal. Para este sistema dibujar el diagrama de bloques correspondiente y deducir la ubicación óptima del repetidor cuando el medio es el aire.

### Problema 1 [18 pts.]

Una señal  $x(t)$  de media nula es modulada en **AM**. Esta señal llega con un eco interferente de menor amplitud, es decir la señal a la entrada del receptor es de la forma:

$$v(t) = x_c(t) + \alpha x_c(t - t_d).$$

El tiempo de eco  $t_d$  se mide experimentalmente y luego se elige la frecuencia de la portadora  $\omega_c$  de forma que se cumpla la siguiente relación  $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$ .

- (a) Se propone utilizar un demodulador sincrónico como receptor. Dibujar el diagrama de bloques del sistema y encontrar la salida detectada.
- (b) Si la transmisión se hace en presencia de ruido AWGN con densidad espectral de potencia  $S_n(f) = \eta/2$ , calcular la  $SNR_D$  obtenida con el detector sincrónico en función de los parámetros del sistema.
- (c) Ahora se propone utilizar un detector de envolvente como receptor. Dibujar el diagrama de bloques del sistema y encontrar la salida detectada.
- (d) Mostrar que si los parámetros del sistema permiten la utilización de un detector de envolvente, la señal detectada en la parte anterior es aproximadamente proporcional al mensaje enviado. Calcular la  $SNR_D$  en este caso.

## Pregunta 2 [7 pts.]

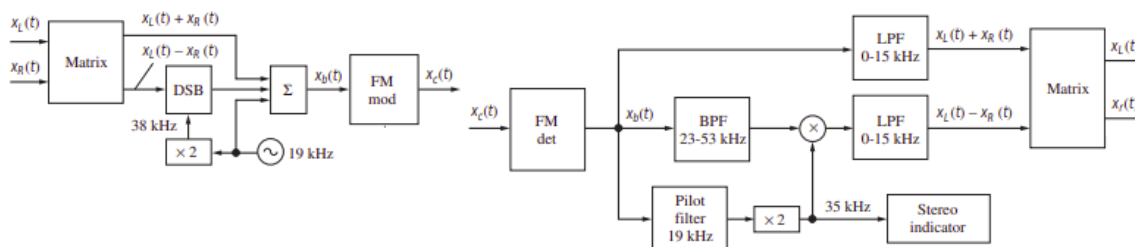
En modulación FM, se puede ver que la densidad espectral del ruido luego de la detección queda:

$$S_{N_d} = \frac{\eta}{2S_R} f^2 \text{ con } |f| < B_T/2, 0 \text{ en otro caso.}$$

Para calcular la potencia de ruido en detección, es necesario conocer el filtro con el que se recupera el mensaje. En este caso se busca analizar el caso en que se utilizan filtros de pre/de-énfasis, con la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H_{\text{pre}}(f) = 1/H_{\text{de}}(f) = 1 + j \frac{f}{f_{3\text{dB}}}$$

- Hallar la SNR en detección cuando se utilizan filtros de pre/de-énfasis y asumiendo  $W \gg f_{3\text{dB}}$ .  
¿Cuál es el factor de mejora respecto a no usarlos?
- Indicar en el diagrama de bloques del transmisor y receptor de FM estéreo que se muestra en la figura, dónde se colocarían los filtros de pre-énfasis y de-énfasis respectivamente. Justificar debidamente los puntos seleccionados.



## Problema 2 [18 pts.]

En TV analógica el audio se transmite utilizando modulación FM. En los países que se utiliza canales de 6MHz como en Uruguay, la portadora del audio se encuentra en los 5.75MHz, considerando un canal que va desde 0 hasta 6MHz. A continuación se analiza el funcionamiento, considerando tanto transmisiones FM mono como estéreo. Para los cálculos se considera un ancho de banda  $W = 15\text{kHz}$ , una desviación en frecuencia  $f_{\Delta} = 75\text{kHz}$ .

- Verificar que es posible enviar una señal mono en FM en el ancho de banda disponible en un canal de TV analógica de 6MHz.

Para transmitir una señal de audio estéreo, se transmite en banda base la suma del canal izquierdo y derecho (L+R), y la resta de ambos (L-R) modulada en DSB-SC a 38kHz.

- Verificar que es posible enviar una señal estéreo en FM en el ancho de banda disponible en un canal de TV analógica de 6MHz.

De ahora en adelante se considera el caso de FM estéreo. Se desea analizar el desempeño considerando un canal inalámbrico, con atenuación dada por el modelo de Friis<sup>2</sup>. Para los cálculos se asume una distancia de 2km y una frecuencia de 600MHz. Además el receptor introduce ruido AWGN con densidad espectral de potencia  $\eta/2$  con  $\eta = 10^{-15}\text{W/Hz}$ . Además, se asume que la potencia de la señal suma L+R es  $P_{\text{SUMA}}$  y la potencia de la señal resta es  $P_{\text{RESTA}}$ .

- Hallar el mínimo  $A_c$  tal que se alcanza el umbral de FM para operar correctamente.
- Calcular la potencia de ruido en la componente L+R ( $N_{\text{SUMA}}$ ) y en la componente L-R ( $N_{\text{RESTA}}$ ).
- Hallar la relación entre las SNR luego de recuperar las componentes L+R ( $\text{SNR}_{\text{SUMA}}$ ) y L-R ( $\text{SNR}_{\text{RESTA}}$ ). Comprobar que ambas son distintas e indicar qué problemas podría traer esto y cómo podría solucionarse.

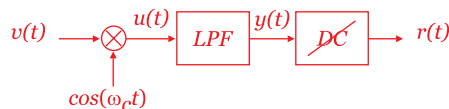
<sup>1</sup>Puede ser útil la primitiva  $\int \frac{x^2}{1+x^2} = x - \tan^{-1}(x)$

<sup>2</sup>Friis:  $L = (4\pi df/c)^2$ , siendo  $c = 3 \times 10^8\text{m/s}$

# Solución

## Problema 1

(a)



En el detector sincrónico

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(\omega_c(t - t_d))$$

por lo tanto

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))[1 + \cos(2\omega_c t)] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))[\cos(2\omega_c t - \omega_c t_d) + \cos(\omega_c t_d)]$$

ahora usando que se eligió  $\omega_c$  para que  $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$  obtenemos que

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))[1 + \cos(2\omega_c t)] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d)) \sin(2\omega_c t)$$

y luego filtrando obtenemos que  $y(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))$ , eliminando el termino de continua obtenemos

$$r(t) = \frac{A_c}{2} \mu x(t).$$

Se observa que el eco no afecta la detección.

(b) En este caso no aparecen errores en la detección debidas a la interferencia, entonces estamos en las condiciones analizadas en teórico para un detector sincrónico de AM. Entonces la  $SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \frac{S_R}{\eta W}$ . Donde tenemos que  $S_R = S_T$  ya que no hay atenuación en el canal.

(c) Ahora veamos en el caso de un detector de envolvente



$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(\omega_c(t - t_d))$$

Como  $\omega_c$  fue elegido de forma que se cumpla  $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$ , tenemos que

$$\cos(\omega_c(t - t_d)) = \cos(\omega_c t - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega_c t)$$

entonces,

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(\omega_c t) - \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \sin(\omega_c t)$$

y al pasarla por el detector de envolvente tenemos que

$$A_v(t) = A_c \sqrt{(1 + \mu x(t))^2 + \alpha^2 (1 + \mu x(t - t_d))^2}$$

La señal detectada es:

$$r(t) = A_v(t) - \mathbb{E}\{A_v(t)\}$$

(d) Como  $\omega_c t_d = \pi/2$ , tenemos que

$$t_d = \frac{\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{4f_c} = \frac{T_c}{4}$$

donde  $T_c$  es el período de la portadora.

Para poder utilizar un detector de envolvente debe cumplirse que la frecuencia de la portadora debe ser mucho mayor que el ancho de banda del mensaje,

$$f_c \gg W.$$

Como la frecuencia de las componentes de la señal  $x(t)$  son mucho menores que la frecuencia de la portadora, las variaciones de  $x(t)$  en un período de la portadora serán despreciables. Entonces se puede asumir que  $x(t)$  cambia muy poco en un cuarto de ciclo de la portadora y por lo tanto  $x(t) \approx x(t - t_d)$ . Finalmente

$$A_v(t) = A_c \sqrt{(1 + \mu x(t))^2 + \alpha^2 (1 + \mu x(t - t_d))^2} \approx A_c (1 + \mu x(t)) \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

que luego de eliminar la continua resulta proporcional al mensaje:

$$r(t) \approx A_c \mu x(t) \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Para el calculo de la  $SNR_D$  tenemos que

$$A_v = \sqrt{[A_c(1 + \mu x) + n_i]^2 + [\alpha A_c(1 + \mu x) + n_q]^2} = \sqrt{A_c^2 (1 + \alpha^2) (1 + \mu x)^2 + 2A_c(1 + \mu x) (n_i + \alpha n_q) + n_i^2 + n_q^2}$$

si se cumple que la potencia de la señal de AM es mucho mayor que la potencia del ruido

$$A_v \approx \sqrt{1 + \alpha^2} (1 + \mu x) \left( 1 + \frac{n_i + \alpha n_q}{A_c (1 + \alpha^2) (1 + \mu x)} \right)$$

$$SNR_D = \frac{A_c^2 \mu^2 P_x (1 + \alpha^2)}{2\eta W}$$

## Pregunta

(a) La potencia del mensaje detectado no varía al agregar los filtros de pre/de énfasis. Para hallar la potencia del ruido, es necesario hacer la integral entre  $-W$  y  $W$  de  $S_{N_d}(f) |H_{de}(f)|^2$ . De esta forma:

$$S_D = f_{\Delta}^2 P$$

$$N_D = \frac{\eta W f_{3dB}^2}{S_R}$$

$$SNR_D = S_D / N_D = \frac{S_R f_{\Delta}^2 P}{\eta W f_{3dB}^2}$$

Dado que la potencia del mensaje recibido no cambia, y siendo la potencia del ruido al no usar los filtros de pre/de énfasis  $\frac{\eta W^2}{3S_R}$ , la mejora corresponde al factor  $(W/f_{3dB})^2/3$ .

(b) El filtro de pre-énfasis va antes del modulador FM en el transmisor, mientras que el filtro de de-énfasis se debe ubicar luego del demodulador de FM en el receptor.

## Problema 2

(a)  $B_T = 2(D + 2)W = 2(f_{\Delta}/W + 2)W = 2(75/15 + 2)15 = 210\text{kHz} < 500\text{kHz}$

(b)  $B_T = 2(D + 2)W = 2(f_{\Delta}/W + 2)W = 2(75/53 + 2)53 = 362\text{kHz} < 500\text{kHz}$

(c) Para llegar al umbral de FM se debe cumplir  $SNR_R = 10$ . Por lo tanto, se tiene:

$$SNR_R = \frac{A_c^2}{2\eta LB_T} \rightarrow A_c = \sqrt{20\eta LB_T} = 4.26$$

Notar que  $B_T$  es el calculado en la parte anterior (362kHz), y  $L$  corresponde a la ecuación de Friis evaluada en  $d = 2\text{km}$  y  $f = 600\text{MHz}$  (94dB).

(d) En ambos casos se debe integrar la potencia de ruido  $S_{N_d} = \frac{\eta}{2S_R} f^2$ , con la diferencia que en un caso la integral es entre  $-W$  y  $W$ , mientras que en el otro es dos veces la que va entre  $f_{\text{DSB}} - W$  y  $f_{\text{DSB}} + W$ . De esta forma el cálculo queda:

$$N_{\text{SUMA}} = \frac{\eta W^3}{3S_R}$$

$$N_{\text{RESTA}} = \frac{2\eta W}{3S_R} (3f_{\text{DSB}}^2 + W^2)$$

Por lo tanto la relación entre los ruidos queda:

$$\frac{N_{\text{SUMA}}}{N_{\text{RESTA}}} = \frac{\eta W^3}{3S_R} \frac{3S_R}{2\eta W (3f_{\text{DSB}}^2 + W^2)} = \frac{W^2}{2(3f_{\text{DSB}}^2 + W^2)}$$

Se puede ver que este cociente es siempre menor que uno, lo que indica que la potencia de ruido para el canal resta es mayor. Si se considera el caso  $f_{\text{DSB}} = W$  la potencia en el canal suma es 8 veces menor que en el canal resta.

(e) Si asumo que la resta que se modula en DSB tiene una ganancia para compensar la multiplicación del detector sincrónico, en ese caso ambos mensajes tienen potencia detectada igual a la transmitida por un factor  $f_{\Delta}^2$  dado por la constante de desviación en frecuencia de FM. Por lo tanto, ambas SNR difieren por el ruido calculado en la parte previa, quedando así:

$$SNR_{\text{SUMA}} = \frac{f_{\Delta}^2 P_{\text{SUMA}}}{N_{\text{SUMA}}} = \frac{f_{\Delta}^2 P_{\text{SUMA}} 3S_R}{\eta W^3}$$

$$SNR_{\text{RESTA}} = \frac{f_{\Delta}^2 P_{\text{RESTA}}}{N_{\text{RESTA}}} = \frac{f_{\Delta}^2 P_{\text{RESTA}} 3S_R}{2\eta W (3f_{\text{DSB}}^2 + W^2)}$$

Si el ruido es distinto en L+R que en L-R, esto podría afectar al momento de hacer la combinación lineal para recuperar L y R respectivamente. Se puede usar filtros de pre/de énfasis para que el ruido afecte por igual a todas las frecuencias, de esa forma el ruido sería similar en la suma (L+R) que en la resta (L-R).