Solución del problema 1

1)

Aplicando la segunda cardinal sobre el eje del timón

$$J\ddot{\theta} = \tau_{AH} + \tau_{EXT} - \tau_{AIRE}$$
$$J\ddot{\theta} = \tau_{AH} + \tau_{EXT} - \frac{L}{2}.F_{AIRE}.sen(\theta)$$
$$J\ddot{\theta} = \tau_{AH} + \tau_{EXT} - \frac{L}{2}.bsen(\theta)v_{AIRE}.sen(\theta)$$
$$J\ddot{\theta} = \tau_{AH} + \tau_{EXT} - \frac{L}{2}.b.sen(\theta)^2 v_{AIRE}$$

Entonces, el modelo en variables de estado resultante es:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{AH}}{J} + \frac{\tau_{EXT}}{J} - \frac{L}{2J}.b.sen(\theta)^2 v_{AIRE} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

2)

En tierra, se cumple que $\tau_{EXT} = \tau_{AIRE} = 0$. Entonces

$$J\ddot{\theta} = \tau_{AH}$$

Pasando a la representación de Laplace

$$J\ddot{\theta}(s) = \tau_{AH}(s)$$

$$J\ddot{\theta}(s) = \tau_{AH}(s)$$

$$J.s.\dot{\theta}(s) = \tau_{AH}(s)$$

Dividiendo a ambos lados por $v_C(s)$

$$J.s.\frac{\dot{\theta}(s)}{v_C(s)} = J.s.H(s) = \frac{\tau_{AH}(s)}{v_C(s)}$$

Por otro lado, a partir del Diagrama de Bode se puede observar que:

- La ganancia en DC es $0\ dB$
- El sistema tiene dos polos considerablemente separados, dado que se aprecian dos escalones independientes en el diagrama de fase
- Los polos se encuentran en $5\ rad/s$ y $100\ rad/s$

Con esta información,

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{v_C(s)} = \frac{500}{(s+5)(s+100)}$$
$$\frac{\tau_{AH}(s)}{v_C(s)} = \frac{500.J.s}{(s+5)(s+100)}$$

3)

Linealizando el sistema en torno al punto $[0, 0, v_{AIRE_0}] \rightarrow \theta = 0$

$$\tilde{\ddot{\theta}} = \left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\dot{\theta}}\right|_{pop} \tilde{\dot{\theta}} + \left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\theta}\right|_{pop} \tilde{\theta} + \left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\tau_{AH}}\right|_{pop} \widetilde{\tau_{AH}} + \left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\tau_{EXT}}\right|_{pop} \widetilde{\tau_{EXT}} + \left.\frac{d\ddot{\theta}}{dv_{AIRE}}\right|_{pop} \widetilde{v_{AIRE}}$$

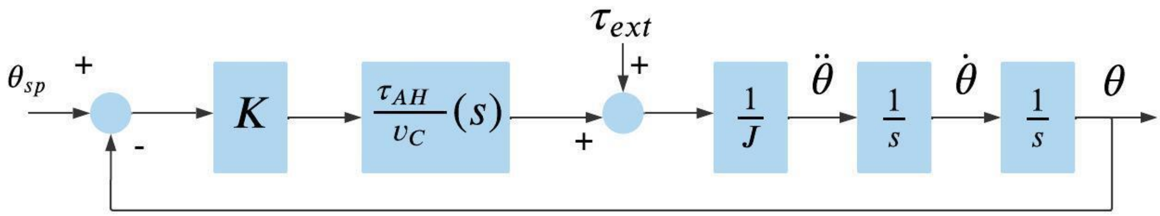
$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\dot{\theta}}\right|_{pop} = 0$$

$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\theta}\right|_{pop} = -\frac{L}{2J}.b.v_{AIRE}.2sen(\theta)cos(\theta)\Big|_{pop} = 0$$

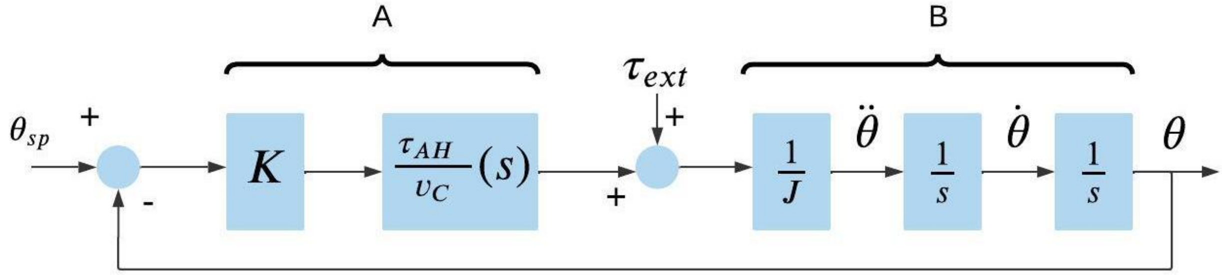
$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\tau_{AH}}\right|_{pop} = 1$$
$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{d\tau_{EXT}}\right|_{pop} = 1$$
$$\left.\frac{d\ddot{\theta}}{dv_{AIRE}}\right|_{pop} = -\frac{L}{2J}.b.sen(\theta)^2\Big|_{pop} = 0$$

Un análisis rápido del modelo linealizado muestra que el problema pierde dependencia de la fuerza de resistencia del aire. Esto tiene sentido, ya que si el timón se encuentra alineado con la velocidad del avión el aire circundante no puede ejercer una torsión, puesto que el brazo de palanca se anula.

4)



5)

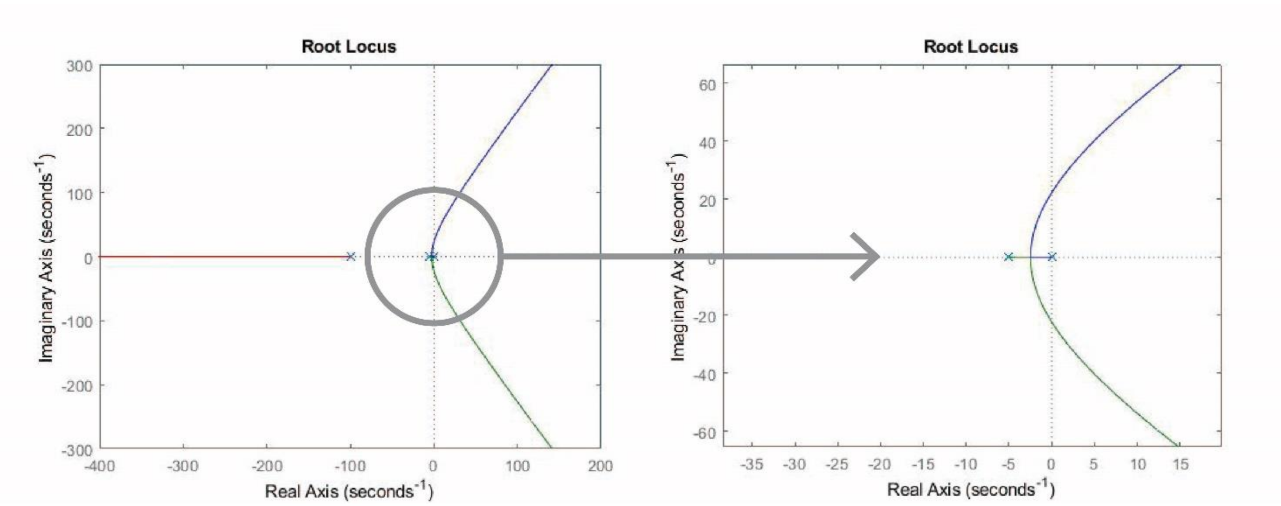


$$\theta(s) = \left[\frac{A(s)B(s)}{1+A(s)B(s)}, \frac{B(s)}{1+A(s)B(s)}\right]\begin{bmatrix}\theta_{SP}\\ \tau_{ext}\end{bmatrix}$$

$$\theta(s) = \left[\frac{\frac{500.K}{(s+5)(s+100)s}}{1+\frac{500.K}{(s+5)(s+100)s}}, \frac{\frac{1}{Js^2}}{1+\frac{500.K}{(s+5)(s+100)s}}\right]\begin{bmatrix}\theta_{SP}\\ \tau_{ext}\end{bmatrix}$$

$$\theta(s) = \left[\frac{500.K}{(s+5)(s+100)s+500.K}, \frac{(s+5)(s+100)\frac{1}{J}}{(s+5)(s+100)s^2+500.K.s}\right]\begin{bmatrix}\theta_{SP}\\ \tau_{ext}\end{bmatrix}$$

6)



Para estudiar la estabilidad del sistema de acuerdo al parámetro K, aplicamos el criterio de Routh-Rurwitz

$$d(s) = (s+5)(s+100)s + 500.K$$
$$d(s) = s^3 + 105s^2 + 500s + 500.K$$

$\boldsymbol{f_3(s)}$	1	500
$\boldsymbol{f_2(s)}$	105	$500K$
$\boldsymbol{f_1(s)}$	$500 - \frac{500}{105}K$	
$\boldsymbol{f_0(s)}$	$500K$	

Para que no haya cambios de signo debe cumplirse que

- $500K > 0 \rightarrow K > 0$
- $500 - \frac{500}{105}K > 0 \rightarrow K < 105$

Otra forma de llegar al mismo resultado es observar el LGR e imponer que el sistema debe tener dos polos complejos puros y un polo real negativo

$$s^3 + 105s^2 + 500s + 500.K = (s^2 + \alpha)(s + \beta) = s^3 + \beta s^2 + \alpha s + \alpha\beta$$

- $\alpha = 500$
- $\beta = 105$
- $500K = 500.105 \rightarrow K = 105$

7) Para que el sistema tenga la respuesta más rápida posible sin presentar oscilaciones sus polos dominantes deben ubicarse en el punto múltiple

$$H(s) = \frac{500.K}{(s+5)(s+100)s + 500.K} \rightarrow \frac{dH(S)}{ds} = \frac{500(3s^2 + 210s + 500)}{(s^3 + 105s^2 + 500s + 500)}$$

Las raíces del polinomio son $\{-2.468, -67.532\}$.

Solamente la primera raíz pertenece al LGR. Despejando el valor de K

$$s^3 + 105s^2 + 500s + 500.K = (s + 2.468)^2(s + b)$$
$$s^3 + 105s^2 + 500s + 500.K = (s^2 + 4.936s + 6.091)(s + b)$$
$$s^3 + 105s^2 + 500s + 500.K = s^3 + (4.936 + b)s^2 + (6.091 + 4.936b)s + 6.091b$$

$$105 = 4.936 + b \rightarrow b = 100.064$$
$$500s = 6.091 + 4.936b \rightarrow b = 100.064$$
$$500.K = 6.091b \rightarrow K = 1.22$$

8)

$$\frac{\theta}{\tau_{EXT}}(s) = \frac{(s+5)(s+100)\frac{1}{J}}{(s+5)(s+100)s^2 + 500.K.s}$$

El sistema tiene un polo en $s = 0$, por lo que no es estable. Si sustituimos el bloque K por un bloque integrador $C(s) = \frac{K_I}{s}$

$$\frac{\theta}{\tau_{EXT}}(s) = \frac{(s+5)(s+100)\frac{1}{J}}{(s+5)(s+100)s^2 + 500.K_I}$$

$$d(s) = (s+5)(s+100)s^2 + 500.K_I$$
$$d(s) = s^4 + 105s^3 + 500s^2 + 500.K_I$$

$\boldsymbol{f_4(s)}$	1	500	$500K_I$
$\boldsymbol{f_3(s)}$	105	0	
$\boldsymbol{f_2(s)}$	500	$500K_I$	
$\boldsymbol{f_1(s)}$	$-105K_I$		
$\boldsymbol{f_0(s)}$	$500K_I$		

Con este nuevo bloque tampoco podemos lograr un sistema estable. Si pasamos a usar un bloque $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$

$$d(s) = (s+5)(s+100)s^2 + 500.(K_P s + K_I)$$
$$d(s) = s^4 + 105s^3 + 500s^2 + 500.K_P s + 500.K_I$$

$\boldsymbol{f_4(s)}$	1	500	$500K_I$
$\boldsymbol{f_3(s)}$	105	$500.K_P$	
$\boldsymbol{f_2(s)}$	$500 - \frac{500}{105}.K_P$	$500K_I$	
$\boldsymbol{f_1(s)}$	$500.K_P - 500K_I.\frac{105}{500 - \frac{500}{105}.K_P}$		
$\boldsymbol{f_0(s)}$	$500K_I$		

- $500 - \frac{500}{105}.K_P > 0 \rightarrow K_P < 105$
- $500.K_P - 500K_I.\frac{105}{500-\frac{500}{105}.K_P} > 0 \rightarrow K_P > K_I.\frac{105}{500-\frac{500}{105}.K_P} \rightarrow 500K_P - \frac{500}{105}.K_P^2 > 105K_I$
- $K_I > 0$

Solución del problema 2

1) Las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema de entrada T y salida y_s son:

$$\begin{aligned} &k\,(e-y) - b\dot{y} - \tfrac{T}{2r} = m\tfrac{\ddot{y}}{2}, \\ &y_S(t) = y(t-\tau), \end{aligned}$$

donde $\tau = \frac{d}{v}$.

2) Sea $y_0 = \frac{9}{10}e$. Si $y = y_0$ en equilibrio, entonces $T = T_0 = 2rk\,(e - y_0) = rk\frac{e}{5}$. Sean $\tilde{T} = T - T_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, y $\tilde{y}_S = y_S - y_0$. Las ecuaciones del modelo linealizado son:

$$\begin{aligned} &-k\tilde{y} - b\dot{\tilde{y}} - \tfrac{1}{2r}\tilde{T} = \tfrac{1}{2}m\ddot{\tilde{y}}, \\ &\tilde{y}_S(t) = \tilde{y}(t-\tau). \end{aligned}$$

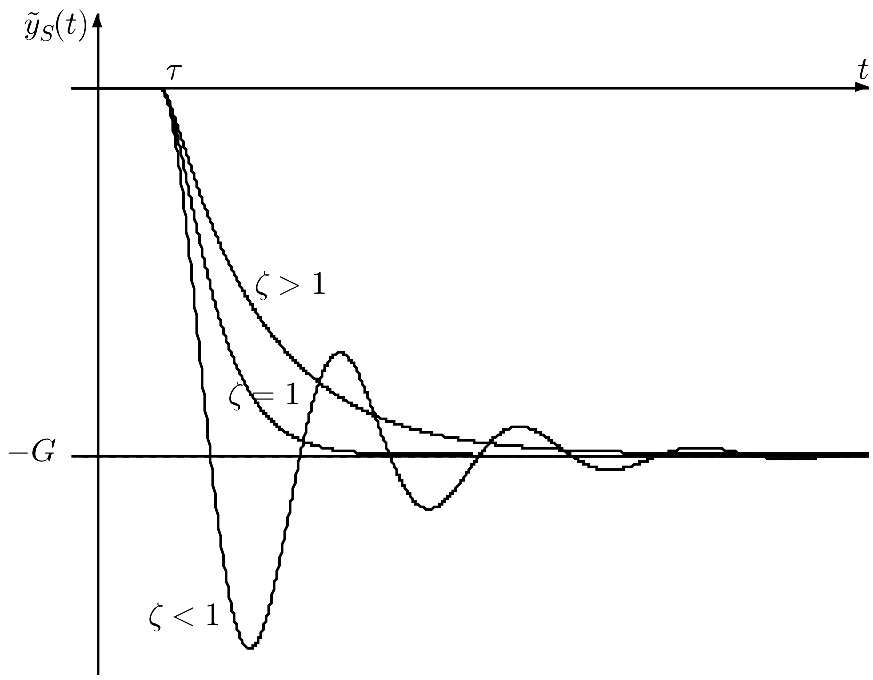
La función de transferencia del modelo linealizado es:

$$H(s) = \frac{\tilde{y}_S}{\tilde{T}} = -Q(s)\exp(-\tau s),$$

donde: $Q(s) = \frac{G\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, $G = \frac{1}{2kr}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\zeta = \frac{b}{\sqrt{2km}}$, $\tau = \frac{d}{v}$.

3) La función de transferencia $H(s)$ corresponde a un sistema de segundo orden sin ceros, con ganancia $-G$, razón de amortiguamiento ζ, frecuencia natural ω_n, y retardo τ. Este sistema, puede presentar tres respuestas *cualitativamente* distintas:

1. caso subamortiguado ($\zeta < 1$),
2. caso críticamente amortiguador ($\zeta = 1$),
3. caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$).



4) Sea $\bar{Q}(z)$ la transmitancia muestreada de $Q(s) = G\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$ con $a = 2$, $b = 5$, y $G = \frac{1}{10}$.

$$
\begin{aligned}
&\bar{Q}(z) = G\tfrac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}, \text{ donde:}\\
&\quad b_1 = \tfrac{b(1-\exp(-ah)) - a(1-\exp(-bh))}{b-a} \approx 0.1801,\\
&\quad b_2 = \tfrac{a(1-\exp(-bh))\exp(-ah) - b(1-\exp(-ah))\exp(-bh)}{b-a} \approx 0.1006,\\
&\quad a_1 = -\left(\exp(-ah) + \exp(-bh)\right) \approx -0.8930,\\
&\quad a_2 = \exp\left(-(a+b)h\right) \approx 0.1738.
\end{aligned}
$$

La función de transferencia de lazo abierto es:

$$L(z) = KC(z)\bar{Q}(z)z^{-1}$$

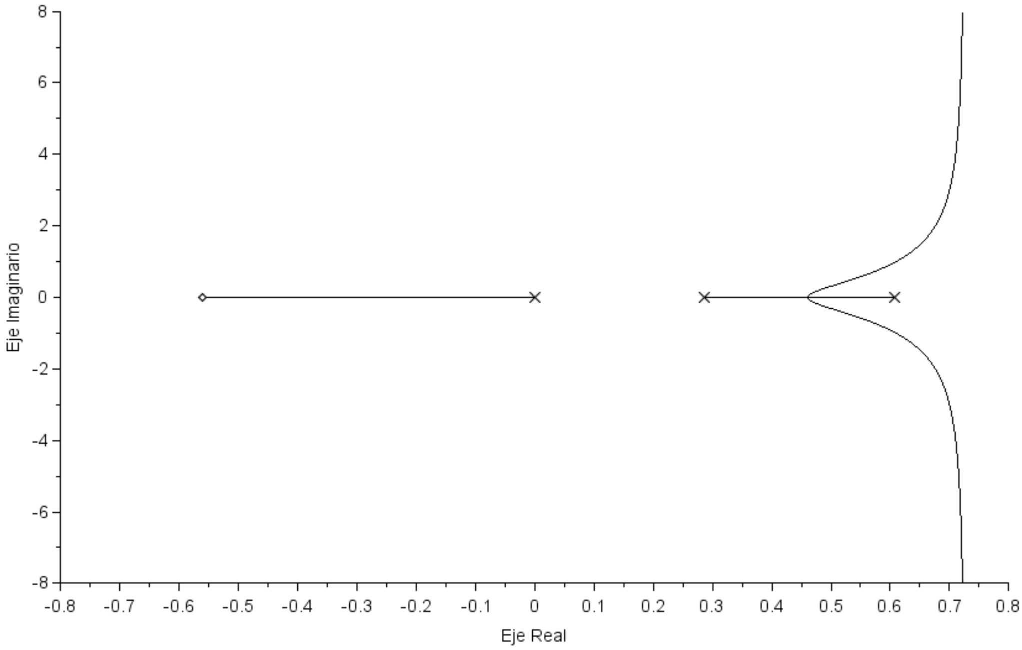
donde el retardo z^{-1} se debe al tiempo muerto $\tau = d/v$ igual al período de muestreo h. Sustituyendo $\bar{Q}(z)$,

$$L(z) = KC(z)G\tfrac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}z^{-1} = KC(z)G\tfrac{b_1 z + b_2}{(z^2 + a_1 z + a_2)z}.$$

Para $C(z) = 1$, los polos del sistema realimentado son las raíces del polinomio

$$
\begin{aligned}
p_K(z) &= \left(z^2 + a_1 z + a_2\right) z + KG\left(b_1 z + b_2\right)\\
&= \left(z - \exp(-ah)\right)\left(z - \exp(-bh)\right) z + KG\left(b_1 z + b_2\right)
\end{aligned}
$$

paramétrico en K. El lugar geométrico positivo ($K > 0$) de las raíces de $p_K(z)$ es el siguiente:



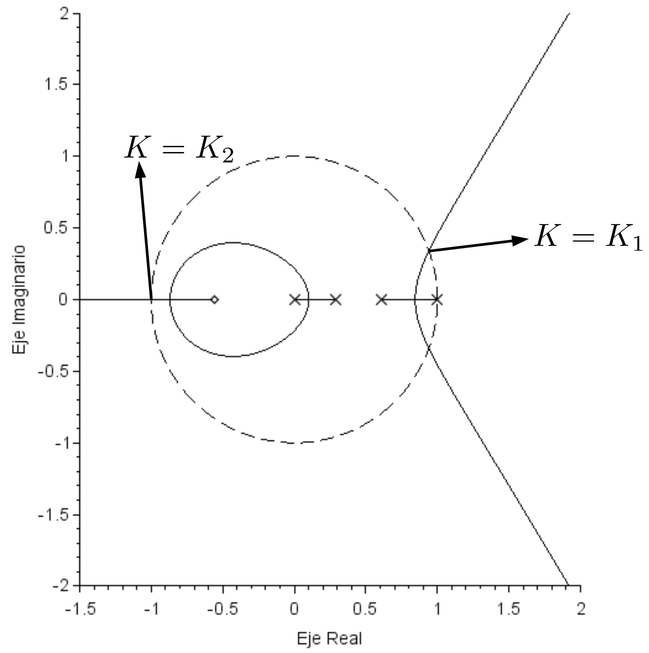
Claramente, el polinomio $p_K(z)$ tiene dos raíces de módulo mayor que 1 para $K \to +\infty$. Por lo tanto, el sistema realimentado no es estable para $K \to +\infty$. Ante una entrada escalón en $\tilde{y}_R[n]$, el error $\tilde{y}_R[n] - \tilde{y}_S[n]$ diverge para $n \to +\infty$.

5) Para que la transferencia de lazo cerrado tenga ganancia en régimen estacionario unitaria, se requiere que el lazo abierto tenga al menos un polo en $z = 1$. Alcanza con tomar $C(z) = \frac{1}{z-1}$.

Para $C(z) = \frac{1}{z-1}$, los polos del sistema realimentado son las raíces del polinomio

$$\begin{aligned} p_K(z) &= \left(z^2 + a_1 z + a_2\right) z\,(z-1) + KG\,(b_1 z + b_2) \\ &= (z - \exp(-ah))\,(z - \exp(-bh))\,z\,(z-1) + KG\,(b_1 z + b_2) \end{aligned}$$

paramétrico en K. El lugar geométrico positivo ($K > 0$) de las raíces de $p_K(z)$ es el siguiente:



Claramente, existe $K_{\max} = \min\{K_1, K_2\}$ tal que si $0 < K < K_{\max}$, entonces todas las raíces de $p_K(z)$ tienen módulo menor que 1. Eligiendo K de esta forma, la ganancia en régimen estacionario de $\frac{\tilde{Y}_S}{\tilde{Y}_R}(z)$ vale 1, ya que el error en régimen estacionario vale 0.

6) Diagrama de bloques del sistema realimentado: