Solución del problema 1

1.

Como todo el calor se disipa a través del sistema de enfriamiento

$$T_c - T_{amb} = P_{MCU}.r_D = \frac{r_0}{(1 + c.Q_{AIRE})} P_{MCU}$$

$$T_c = \frac{r_0}{(1 + c.Q_{AIRE})} P_{MCU} + T_{amb}$$

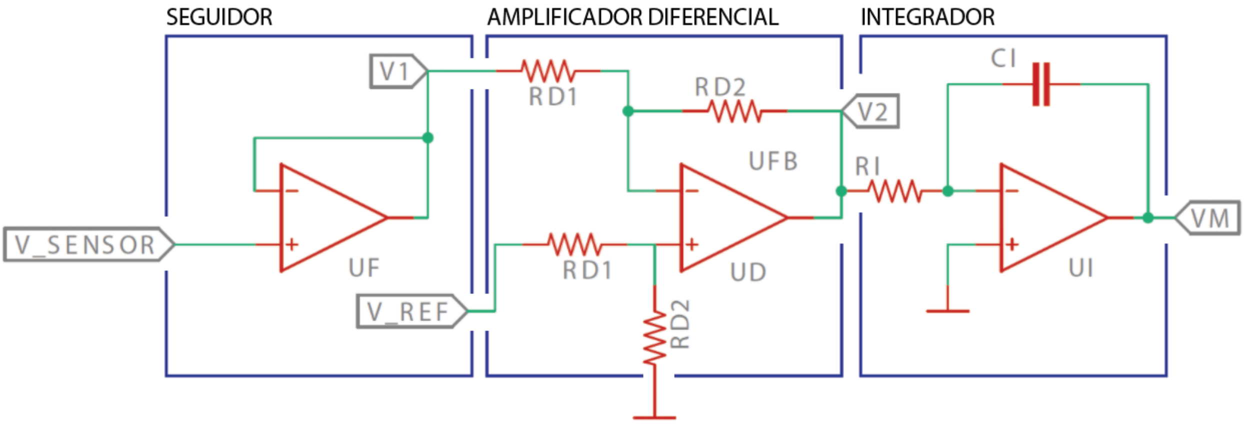
De la expresión de la transferencia del ventilador

$$\frac{Q_{AIRE}}{V_M}(s) = \frac{\alpha}{\beta + s}$$

$$\beta.Q_{AIRE} + \dot{Q}_{AIRE} = \alpha.V_M$$

$$\dot{Q}_{AIRE} = \alpha.V_M - \beta.Q_{AIRE}$$

2.



- $V_1 = V_{sensor}$
- $V_2 = \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right)(V_{REF} - V_1)$
- $V_M(s) = -\frac{1}{C_I R_I s} V_2$

Encadenando todos los bloques:

$$V_M = -\frac{1}{C_I R_I s}\left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right)(V_{REF} - V_{sensor})$$

3.

La única no linealidad del sistema se encuentra en el sub-bloque $T_C = f(Q_{AIRE}, P_{MCU}, T_{amb})$

$$T_c = \frac{r_0}{(1 + c.Q_{AIRE})} P_{MCU} + T_{amb}$$

$$\widetilde{T_C} = \left.\frac{\delta f(\dots)}{\delta Q_{AIRE}}\right|_{P_{op}} .\widetilde{Q_{AIRE}} + \left.\frac{\delta f(\dots)}{\delta P_{MCU}}\right|_{P_{op}} .\widetilde{P_{MCU}} + \left.\frac{\delta f(\dots)}{\delta T_{amb}}\right|_{P_{op}} .\widetilde{T_{amb}}$$

$$\widetilde{T_C} = \frac{-r_0.c}{\left(1 + c.Q_{AIRE_0}\right)^2} P_{MCU_0}.\widetilde{Q_{AIRE}} + \frac{r_0}{\left(1 + c.Q_{AIRE_0}\right)}.\widetilde{P_{MCU}} + .\widetilde{T_{amb}}$$

Como Q_{AIRE_0} no forma parte de las condiciones iniciales, es necesario definir su valor.

De la ecuación diferencial del ventilador,

$$T_{c_0} = \frac{r_0}{(1 + c.\,Q_{AIRE_0})} P_{MCU_0} + T_{amb_0}$$

$$\frac{T_{c_0} - T_{amb_0}}{r_0.\,P_{MCU_0}} = \frac{1}{(1 + c.\,Q_{AIRE_0})}$$

$$1 + c.\,Q_{AIRE_0} = \frac{r_0.\,P_{MCU_0}}{T_{c_0} - T_{amb_0}}$$

$$Q_{AIRE_0} = \left(\frac{r_0.\,P_{MCU_0}}{T_{c_0} - T_{amb_0}} - 1\right).\frac{1}{c}$$

Además, $T_{C\,0} = \frac{V_{sensor}}{K}$. Como el sistema tiene un integrador en el lazo, solo se estabiliza cuando $V_{sensor} = V_{ref}$

$$Q_{AIRE_0} = \left(\frac{r_0.\,P_{MCU_0}}{\frac{V_{ref_0}}{K} - T_{amb_0}} - 1\right).\frac{1}{c}$$

Entonces,

$$\dot{V_m} = -\frac{1}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}}(V_{ref} - V_{sen}) = -\frac{1}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}}(V_{ref} - K.\,T_c)$$

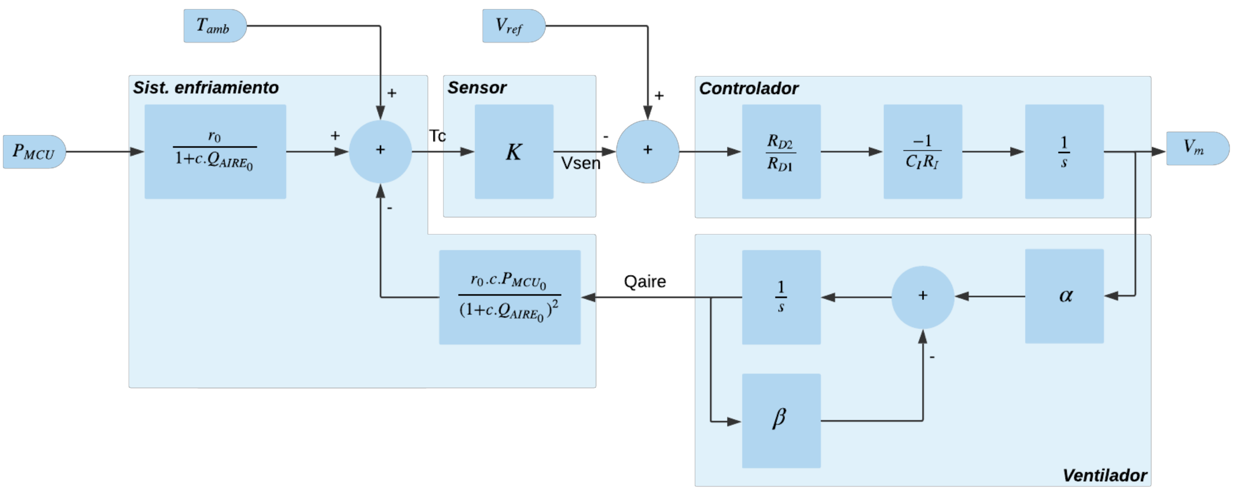
$$\dot{V_m} = \frac{1}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\left(\left[\frac{-K r_0.\,c}{(1 + c.\,Q_{AIRE\,0})^2} P_{MCU_0}.\,Q_{aire} + \frac{K r_0}{(1 + c.\,Q_{AIRE\,0})}.\,P_{mcu} + K.\,T_{amb}\right] - V_{ref}\right)$$

$$\dot{Q}_{aire} = \alpha Vm + \beta Q_{aire}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V_m} \\ \dot{Q}_{aire} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}}.\frac{K r_0.\,c}{(1 + c.\,Q_{AIRE\,0})^2} P_{MCU_0} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ Q_{aire} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}} & \frac{1}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}}.\frac{K r_0}{(1 + c.\,Q_{AIRE\,0})} & \frac{K}{C_I R_I}.\frac{R_{D2}}{R_{D1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ref} \\ P_{mcu} \\ T_{amb} \end{bmatrix}$$

$$[V_m] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} V_m \\ Q_{aire} \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} V_{ref} \\ P_{mcu} \\ T_{amb} \end{bmatrix}$$

4.



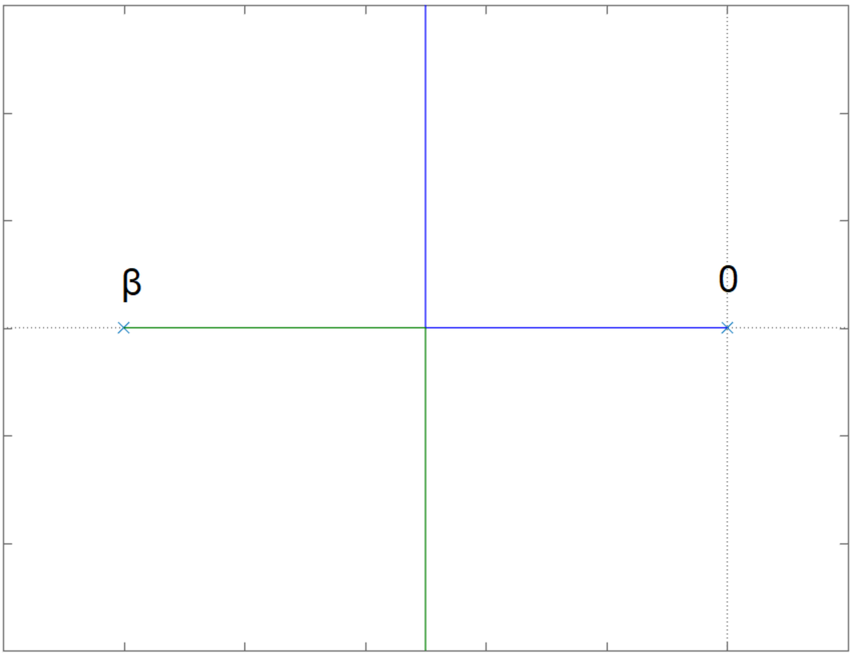
5.

Cortando la realimentación del sistema en V_{sen}, la transferencia de lazo abierto es

$$H_{OL}(s) = \frac{Kr_0.c}{\left(1 + c.Q_{AIRE_0}\right)^2} P_{MCU_0} \frac{1}{C_I R_I s} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right) . \frac{\alpha}{\beta + s}$$

$$H_{OL}(s) = K . \frac{r_0.c}{\left(1 + c.Q_{AIRE_0}\right)^2} P_{MCU_0} \frac{1}{C_I R_I} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right) \alpha . \frac{1}{s(\beta + s)}$$

El sistema no tiene ceros, y sus polos son $\{0, -\beta\}$. Su lugar geométrico tiene la siguiente forma



El LGR tiene un último punto múltiple, que dada la forma de las asíntotas coincide con el centroide.

$$c = \frac{0 - \beta}{2} = -\frac{\beta}{2}$$

6.

Para que el sistema tenga una respuesta no oscilatoria tan rápida como sea posible, el polo menos negativo debe tener un valor absoluto tan grande como sea posible, siempre y cuando ambos sean puramente reales. Esta condición se cumple cuando ambos se ubican en el punto múltiple.

En este punto, definiendo $X = \frac{r_0.c}{\left(1+c.Q_{AIRE_0}\right)^2} P_{MCU_0} \frac{1}{C_I R_I} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right) \alpha$

$$H_{OL}(s) = \frac{K.X}{s(\beta + s)}$$

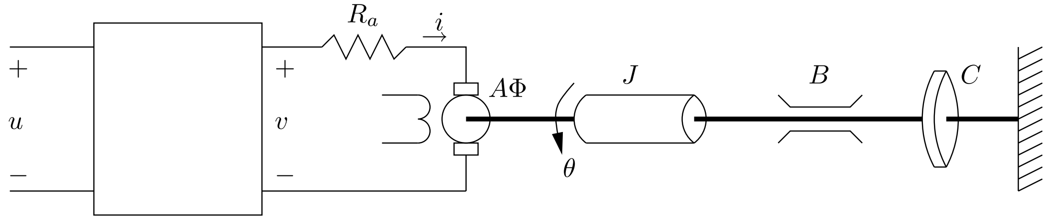
$$H_{CL}(s) = \frac{K.X}{s(\beta + s) + K.X}$$

$$p(s) = s^2 + \beta s + KX = \left(s + \frac{\beta}{2}\right)\left(s + \frac{\beta}{2}\right) = s^2 + \beta s + \frac{\beta^2}{4}$$

Igualando los términos independientes

$$K = \frac{\beta^2}{4X} = \frac{\beta^2}{4 \frac{r_0.c}{\left(1 + c.Q_{AIRE_0}\right)^2} P_{MCU_0} \frac{1}{C_I R_I} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right) \alpha}$$

7. Como $H_{OL}(s)$ tiene dos polos reales negativos y no tiene ceros, su margen de ganancia es infinito.



Solución del problema 2

1. Modelado.

   Amplificador:

$$\dot{v} + 10v = 150u \quad .$$

Motor:

$$\begin{cases} v = R_a i + A\Phi\omega \\ T_m = A\Phi i \end{cases} \quad \text{donde } \omega = \dot{\theta} \quad .$$

Eje:

$$T_m - B\dot{\theta} - C\theta = J\dot{\omega} \quad .$$

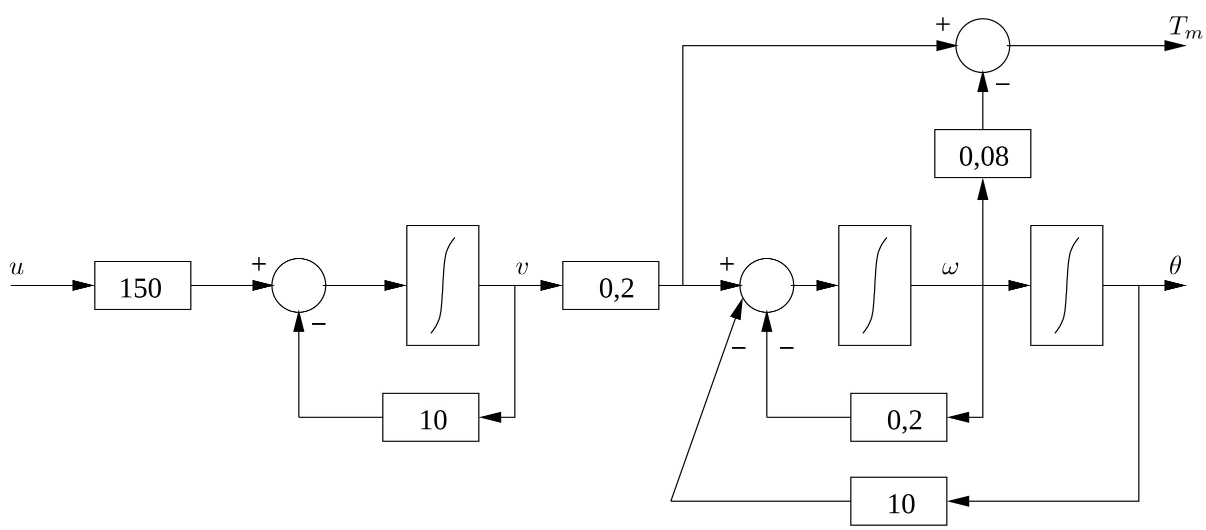
a) Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{donde} \quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ v \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} T_m \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C}{J} & \frac{-\left(BR_a + (A\Phi)^2\right)}{JR_a} & \frac{A\Phi}{JR_a} \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(A\Phi)^2}{R_a} & \frac{A\Phi}{R_a} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,08 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

b) Diagrama de bloques:



c) Matriz de transferencia:

$$M(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{30}{(s+10)(s^2 + 0,2s + 10)} \begin{bmatrix} s^2 + 0,12s + 10 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ siendo } \begin{bmatrix} T_m(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = M(s)\, u(s) \quad .$$

2. Diseño

$$H(s) = \frac{\theta}{u}(s) = \frac{30}{(s+10)(s^2+0,2s+10)} = \frac{30}{s^3+10,2s^2+12s+100} \quad .$$

$$G^{OL}(s) = KH(s) = \frac{30K}{s^3+10,2s^2+12s+100} \quad .$$

Transferencia en lazo cerrado:

$$G^{CL}(s) = \frac{\theta}{r}(s) = \frac{G^{OL}(s)}{1+G^{OL}(s)} = \frac{30K}{s^3+10,2s^2+12s+100+30K} \quad .$$

a) Valores de $K \in \mathbb{R}$ que estabilizan el sistema realimentado.
Routh-Hurwitz:

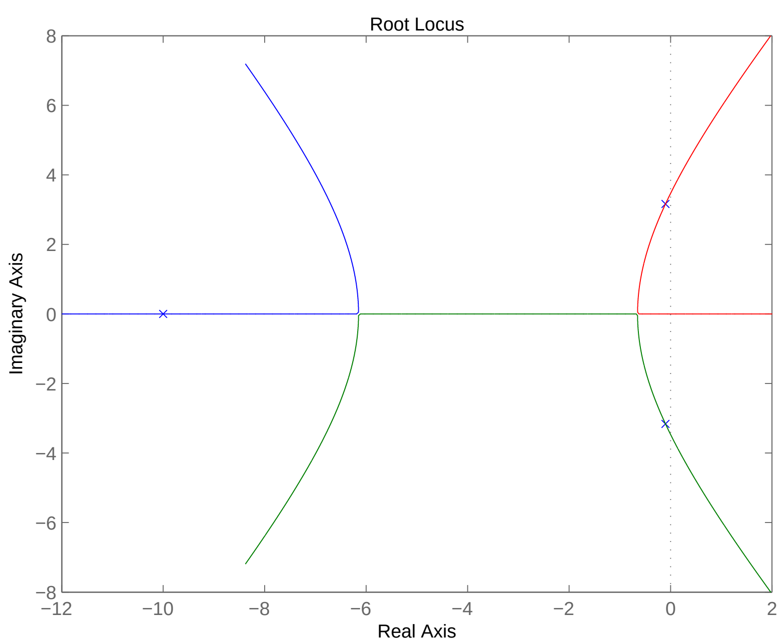
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 12 \\ s^2 & 10,2 & 100+30K \\ s^1 & 12 - \frac{100+30K}{10,2} & \\ s^0 & 100+30K & \end{array} \quad .$$

Sistema realimentado estable si y sólo si:

$$-3,33 \approx -\frac{10}{3} < K < \frac{56}{75} \approx 0,747 \quad .$$

Para $K = -\frac{10}{3}$ una raíz en el eje imaginario en $s=0$. Para $K = -\frac{56}{75}$ dos raíces en el eje imaginario en $s \approx \pm j3,46$.

b) Lugar de las raíces paramétrico en $K \in \mathbb{R}$.



- Polos de H : $\begin{cases} p_1 = -10 \\ p_2 = -0,1 + j3\sqrt{1,11} \approx -0,1 + j3,16 \\ p_3 = -0,1 - j3\sqrt{1,11} \approx -0,1 - j3,16 \end{cases}$.
- Ceros de H : ∞ (triple).

- Cantidad de ramas: 3 .
- Simetría: eje real.
- Asíntotas:
  - para $K > 0$: $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$;
  - para $K < 0$: $\theta_k = \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$.
- Centroide: $\frac{-10-0,1-0,1}{3} = -3,4$.
- Lugar de las raíces en el eje real:
  - para $K > 0$: $(-\infty, -10)$;
  - para $K < 0$: $(-10, +\infty)$.
- Ángulos de partida para $K > 0$:
  - $p_1 = -10$: $\varphi_{p_1}^{partida} = -180°$;
  - $p_2 = -0,1 + j3\sqrt{1,11}$: $\varphi_{p_2}^{partida} = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3\sqrt{1,11}}{9,9}\right)\right)\ rad \approx 72,3°$ y
  - $p_3 = \bar{p}_2$: $\varphi_{p_3}^{partida} = -\varphi_{p_2}^{partida} \approx -72,3°$.
- Intersecciones con el eje imaginario: ver Routh-Hurwitz en la parte anterior.
- Puntos múltiples. $\frac{dH(s)}{ds} = 0 \Leftrightarrow 3s^2 + 20,4s + 12 = 0$.
  $3s^2 + 20,4s + 12 = 0 \Leftrightarrow s = s_{m1} \approx -6,15$ ó $s = s_{m1} \approx -0,650$.
  $H(s_{m1}) > 0$ y $H(s_{m2}) > 0$; así que s_{m1} y s_{m2} pertenecen al lugar geométrico negativo.

c) Determinación de K para que el sobretiro de la respuesta a una entrada en escalón sea de $16,3\,\%$.
Transferencia en lazo cerrado:

$$G^{CL}(s) = \frac{30K}{s^3 + 10,2s^2 + 12s + 100 + 30K} = \frac{30K}{(s+\sigma)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad .$$

Sobretiro: $M_p = 0,163 \Rightarrow \zeta = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M_p}} \approx 0,500$. donde se supuso que el polo real es dominado por el par de polos conjugados.

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n + \sigma = 10,2 \\ \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\sigma = 12 \\ \sigma\omega_n^2 = 100 + 30K \\ \zeta \approx 0,500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma \approx 9,02 \\ \omega_n \approx 1,18 \\ K \approx -2,92 \end{cases} \quad .$$

Para $K \approx -2,92$ los polos de G^{CL} son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\sigma \approx -9,02 \\ s_2 &= -\zeta\omega_n + j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \approx -0,588 + j1,02 \\ s_3 &= -\zeta\omega_n - j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \approx -0,588 - j1,02 \end{aligned} \quad .$$

Se verifica que el par de polos conjugados domina al polo real:

$$9,02 \approx |s_1| \gg |\zeta\omega_n| \approx 0,588 \quad .$$

Para que el sobretiro a una entrada escalón sea de $16,3\,\%$ hay que tomar $K \approx -2,92$.

d) El error en régimen ante una entrada escalón unitario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G^{OL}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{30K}{100}} \approx 8,01 \quad .$$