Solución del problema 1

1) $mL^2\ddot{\theta}(t) = r(t)L - mgLsin(\theta) - bL^2\dot{\theta}$ sale de aplicar torques en el péndulo simple. Para el caso de péndulo invertido, la ecuación resulta

   $mL^2\ddot{\theta}(t) = r(t)L + mgLsin(\theta) - bL^2\dot{\theta}$.

Definiendo como variables de estado $x = [\theta, \dot{\theta}]$, se llega a la representación:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{L} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{mL}\end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix}\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} r$$

2) Imponiendo $sin(\theta) \approx \theta$, la transferencia resulta $H = \frac{1/mL}{s^2+(b/m)s+g/L}$para el péndulo simple y $H = \frac{1/mL}{s^2+(b/m)s-g/L}$para el invertido.

   La representación en diagrama de bloques para el péndulo simple/invertido es:

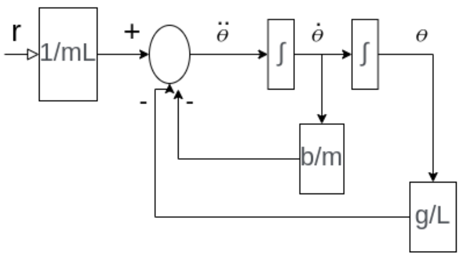


Diagrama de bloques del péndulo simple.

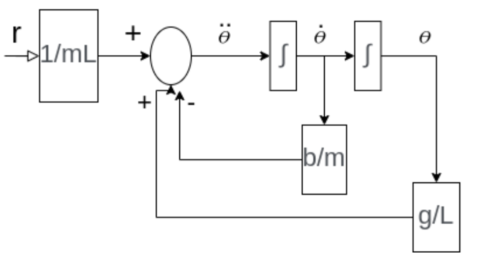


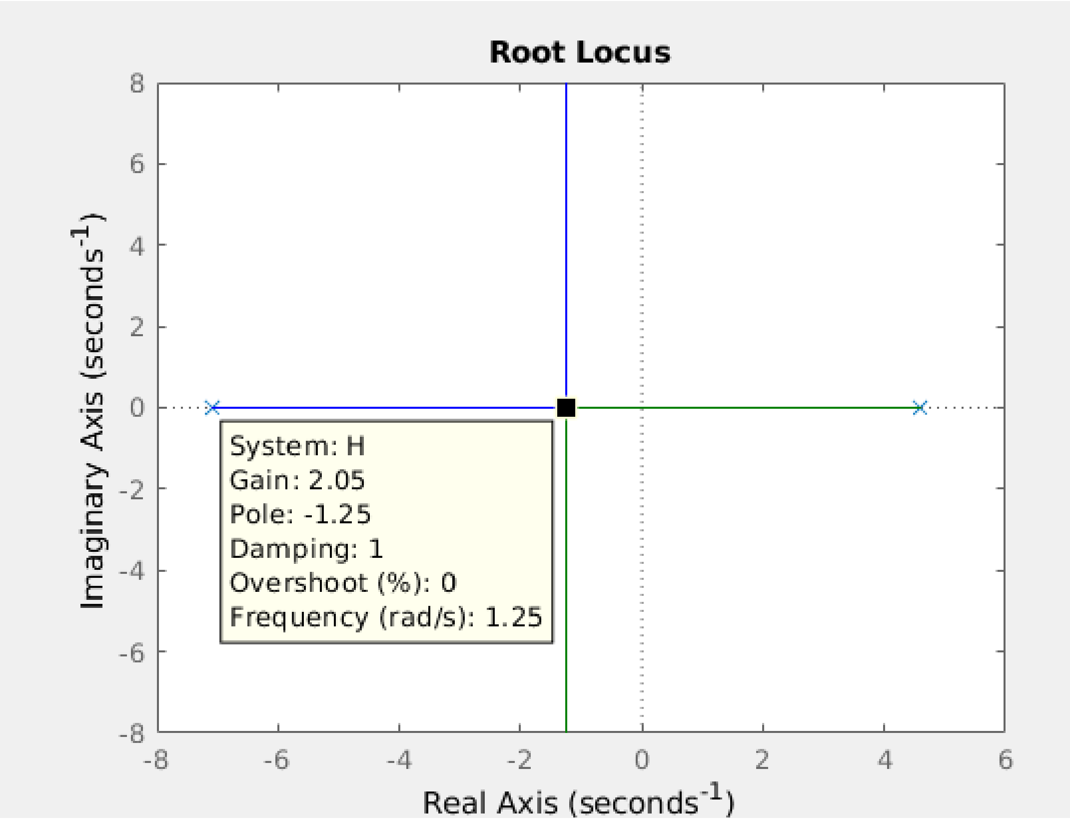
Diagrama de bloques del péndulo invertido

Para el péndulo simple los polos resultan $\frac{-b/m \pm\sqrt{(b/m)^2-4g/L}}{2}$. Ya que el discriminante es necesariamente menor que el cuadrado de b/m, incluso en el caso en que el discriminante resulta positivo, las dos raíces reales resultantes son negativas. Más aún, en el caso más usual, el discriminante es negativo, su raíz compleja por lo que el sistema tendrá polos complejos conjugados que tendrán por parte real $- b/m$.

Los polos son $\frac{-b/m \pm\sqrt{(b/m)^2+4g/L}}{2}$para el péndulo invertido. Notar que como el discriminante siempre es mayor que el cuadrado de b/m, por lo que esto resulta obligatoriamente en un polo negativo y uno positivo.

Como el péndulo invertido cuenta con un polo positivo, cualquier apartamiento del equilibrio hace que la salida crezca exponencialmente y saca al sistema del rango de la linealización, por lo que la linealización deja de describir adecuadamente el movimiento posterior.

3)



Se debe cumplir que el punto medio de los polos sea negativo para que exista *algún* control estabilizante, pero esto se cumple trivialmente ya que el punto medio es $-\ b/2mL$. Sin embargo, mientras menor resulte el valor del cociente b/mL, más ganancia es necesaria para que el polo derecho entre al semiplano izquierdo.

En particular, la ganancia necesaria para que el sistema tenga todos sus polos negativos es k>mg. Esto se ve de lograr que el denominador de $G_{cl} = \frac{kH}{1+kH} = \frac{k/mL}{s^2+(b/m)s-g/L+k/mL}$ tenga exclusivamente coeficientes positivos.

Para dibbujar el Root Locus basta notar que el intervalo entre los polos pertenece al LGP, y que el punto múltiple se da en -b/2m

4) Con los valores numéricos, la transferencia en lazo abierto resulta $H = \frac{16.67}{s^2+2.5s-32.67}$

Para el sistema realimentado, tenemos $G = \frac{kH}{1+kH} = \frac{16.67k}{s^2+2.5s-32.67+16.67k}$.

El sistema realimentado tiene por polos $\frac{-2.5 \pm\sqrt{(2.5)^2-4(-32.67+16.67k)}}{2}$, por lo que la condición de amortiguación crítica es $2.5^2 - 4(-\ 32.67 + 16.67k) = 0$, de donde se despeja $k = 2.05$ y los polos del sistema resultan el -1.25 doble. La transferencia lazo cerrado en estas condiciones es:

$G = \frac{34.17}{(s+1.25)^2}$

5) Para el sistema lineal, $U(s) = 0.1/s$, $\theta(s) = \frac{3.417}{s(s+1.25)^2}$ y por TVF de Laplace,

$\theta_\infty = \lim_{s\to 0} s\theta(s) = 2.18\, rad = 125.3^\circ$.

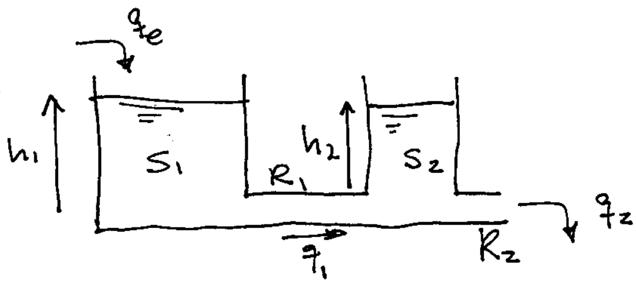
En el caso no lineal, el régimen se estudia en la ecuación diferencial para derivadas nulas: $r_\infty L + mgLsin(\theta_\infty) = 0$

Por otro lado, la realimentación está dada por $(U_\infty - \theta_\infty)k = r_\infty$, con $U_\infty = 0.1$. Sustituyendo se llega a

$(0.1 - \theta_\infty) \times 2.05 = r_\infty = - 1.96 \sin(\theta_\infty)$, ecuación trascendente en θ_∞.

Resolviendo aproximadamente, se obtiene $\theta_\infty = 0.756\, rad = 43.3^o$

1. Ecuaciones de la dinámica



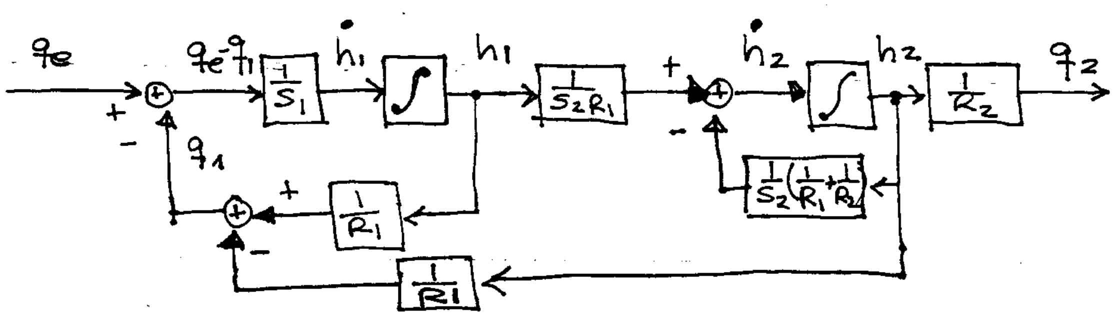
$$\begin{cases} S_1 \dfrac{dh_1}{dt} = q_e - q_1 & (1) \\ S_z \dfrac{dh_z}{dt} = q_1 - q_z & (2) \\ q_1 = \dfrac{h_1 - h_z}{R_1} & (3) \\ q_z = \dfrac{h_z}{R_z} & (4) \end{cases}$$

Sustituyendo q_1 y q_z de (3) y (4) en (1) y (2):

$$\begin{cases} S_1 \dot{h}_1 = q_e - \dfrac{h_1}{R_1} + \dfrac{h_z}{R_1} & (5) \\ S_z \dot{h}_z = \dfrac{h_1 - h_z}{R_1} - \dfrac{h_z}{R_z} = \dfrac{h_1}{R_1} - \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) h_z & (6) \end{cases}$$

Arreglando estas ecs. en forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{S_1 R_1} & \dfrac{1}{S_1 R_1} \\ \dfrac{1}{S_2 R_1} & -\dfrac{1}{S_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_e \\ q_z = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_z \end{bmatrix} + [0]\, q_e \end{cases}$$



2) <u>Función de transferencia</u>

Primero calculamos $\frac{H_2(s)}{Q_e(s)}$. Para ello tomamos tr. de $\mathcal{L}$ en (5)(6)

$$\rightarrow H_1\left(s+\frac{1}{S_1R_1}\right)=\frac{1}{S_1}Q_e+\frac{1}{R_1S_1}H_2 \qquad (7)$$

$$\rightarrow H_2\left[s+\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]=\frac{H_1}{R_1S_2} \qquad (8)$$

$$\hookrightarrow H_1=H_2R_1S_2\left[s+\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

Sustituyendo en (7)

$$H_2R_1S_2\left[s+\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]\left[s+\frac{1}{S_1R_1}\right]=\frac{1}{S_1}Q_e+\frac{1}{R_1S_1}H_2$$

$$H_2R_1S_1S_2\left[s^2+\left(\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{S_1R_1}\right)s+\frac{1}{R_1S_1S_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{R_1^2S_1S_2}\right]=Q_e$$

$$\rightarrow \frac{H_2}{Q_e}=\frac{1}{R_1S_1S_2\left[s^2+\left(\frac{1}{R_1S_2}+\frac{1}{R_2S_2}+\frac{1}{R_1S_1}\right)s+\frac{1}{R_1R_2S_1S_2}\right]}$$

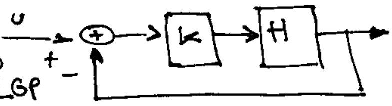
como $Q_2=H_2/R_2$

$$\rightarrow \frac{Q_2}{Q_e}=\frac{1}{R_1R_2S_1S_2\left[s^2+\left(\frac{1}{R_1S_2}+\frac{1}{R_2S_2}+\frac{1}{R_1S_1}\right)s+\frac{1}{R_1R_2S_1S_2}\right]}$$

con los valores numéricos:

$$\boxed{\frac{Q_2}{Q_e}=\frac{8}{s^2+8s+8}}$$

3) Si el controlador $C(s)=k$



3.a — En primer lugar estudiamos $k\geq 0$
Estudiamos el lugar geométrico LGP

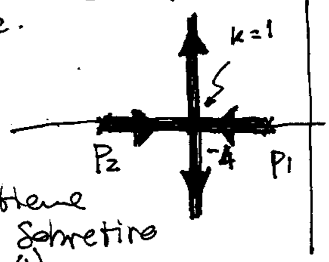
- nº de ramas 2
- nº de asíntotas $2-0=2$

→ las ramas parten de los polos y llegan a asíntotas

polos en (lazo abierto) $-4\pm\frac{\sqrt{32}}{2}=-4\pm 2\sqrt{2}$

$$\hookrightarrow p_1, p_2=\begin{cases}\simeq -6.8283\\ \simeq -1.172\end{cases}$$

- puntos múltiples: $\frac{dH}{ds}=0 \Rightarrow 2s+8=0 \Rightarrow s=-4$
  El pto. $\in$ al lugar $\therefore$ es punto múltiple.
- centroide: $c = -8/2 = -4$
- ramas $\begin{cases} \text{llegan al p. múltiple a } 0° \text{ y } 180 \\ \text{parten del p. múltiple a } \pm 90° \end{cases}$
- lugar sobre el eje real: $[p_1, p_2]$



El menor tiempo de asentamiento se obtiene sobre las asíntotas. Para que no haya sobretiro deben estar en el punto múltiple. ($s_0 = -4$)
Para eso
$$K_0 = -1/H(s_0) = -1/H(-4)$$

$\therefore K_0 = -(16-32+8)/8 = +1$ $\boxed{k_0 = +1}$

Para $k<0$ siempre hay un polo del lazo cerrado a la derecha de p_1 $\therefore$ o bien es inestable, o al menos más lento. $\Rightarrow k \geq 0 \Rightarrow K_0 = 1$ es la mejor solución.

El tiempo de asentamiento es $t_s \cong 3.\tau = \frac{3}{4}$ seg

3.c Estabilidad

La transferencia del lazo cerrado: $\frac{kH}{1+kH}$

Su denominador es $s^2+8s+8+8k$
Aplicando Routh Horwitz:

1	8+8k
8	–
8+8k	–

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } k<-1 \text{ hay un cambio de sg.} \\ \text{Si } k>-1 \text{ no hay cambio de sg} \end{cases}$

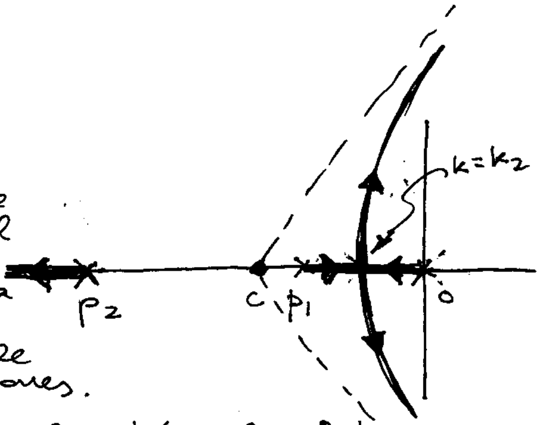
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sistema estable} \iff k>-1}$

4.a
Para que el error asintótico sea 0, el sistema debe ser de tipo 1 al menos. $\Rightarrow$ controlador $C(s) = k/s$ agrega un polo en el origen.

Analicemos el L.G.P. de $\frac{k}{s} \frac{8}{s^2+8s+8}$

- nº ramas: 3
- parten de los 3 polos del lazo abierto $p_1, p_2, 0$
- nº asíntotas: 3
- centroide $c = (p_1+p_2+0)/3 = -4/3$
- pts. múltiples: $\frac{dH}{ds}=0 \Rightarrow \frac{-16 \pm \sqrt{160}}{6} = \begin{cases} -4.77 \leftarrow \text{no está en LGP} \\ -0.56 \leftarrow \text{Si!} \end{cases}$
- segmento sobre eje real $[p_1, 0]$, $[-\infty, p_2]$

∴ hay un rango de valores de K: $0 \leq K \leq K_1$ que produce lazo cerrado estable con error asintótico nulo al escalón.
Elegimos $K = K_2$ que coloca los polos en el pto. múltiple logrando menor tiempo de asentamiento, sin oscilaciones. (ver más abajo)



4.b. Diferencias entre esta elección y la 3.b:

- En este caso error asintótico al escalón es nulo en cambio en 3.b no.
- Error asintótico a la rampa es finito (sistema tipo 1) en cambio en 3.b diverge.
- En este caso el tiempo de asentamiento es mayor de en 3.b ya que son polos reales más a la derecha. Esto es una desventaja, sistema más lento.

para colocar los polos en el pto. múltiple "p". Se calcula k_2:

$$k_2 = -1\Big/\left(\frac{H(s)}{s}\right)\Big|_{s=p} \cong 0.21$$

5. Si en lugar de un controlador "I" se usa un "PI" ~~par~~ se logra que el sistema sea de tipo 1 (∴ el error asintótico al escalón es 0), y además se llevan las ramas más a la izquierda logrando tiempos de asentamiento más bajos.

P. ej. el controlador $C(s) = K\,\frac{s+1.5}{s}$
logra el L.G.P. que se muestra
Se puede lograr menor tiempo de asentamiento aunque con un poco de sobretiro.