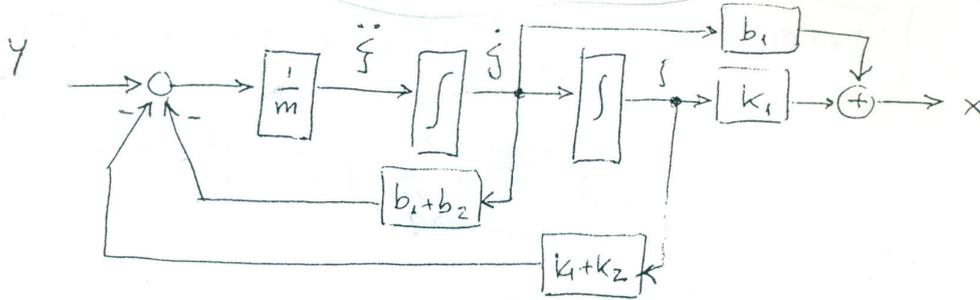


Problema 1

A) $y(t)$ entrada $\Rightarrow m\ddot{x} = -b_2\dot{x} - k_2x - L(\dot{x}-\dot{y}) - k_1(x-y)$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_1s + k_1}{ms^2 + (b_1+b_2)s + (k_1+k_2)} \cdot \frac{\dot{y}}{\dot{y}} = H(s)$$



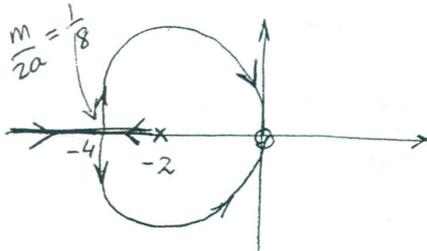
MVE:

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(b_1+b_2)}{m} & \frac{-(k_1+k_2)}{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m \\ 0 \end{bmatrix} y$$

$$x = \begin{bmatrix} b_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \zeta \end{bmatrix}$$

B) $\begin{cases} b_1 = b_2 = a \\ k_1 = k_2 = 2a \end{cases}, m > 0$

$$H(s) = \frac{a(s+2)}{ms^2 + 2as + 4a} \Rightarrow \text{den}(s) = 1 + \frac{m/2a s^2}{(s+2)}$$



Pto múltiple: $2s(s+2) - s^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s=0 \\ s=-4 \end{cases}$
 $s^2 + 4s$

$$s = -4 \Rightarrow \frac{m}{2a} = \frac{1}{8}$$

Resp. no oscilatoria: $\left| 0 < m < \frac{a}{4} \right|$



193 2/2

$$m = \frac{a}{8} \Rightarrow H(s) = \frac{8(s+2)}{s^2 + 16s + 32} \rightarrow s = -2.34$$

$$s = -13.66$$

Resp. escalón:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{0.5}{s} + \frac{0.103}{s+2.34} - \frac{0.603}{s+13.66}$$

$$y(t) = 0.5 + 0.103e^{-2.34t} - 0.603e^{-13.66t}$$

D) $\bar{H}(z) = \frac{z-1}{z} \sum \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{H(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right)$

$$0.5 + 0.103e^{-2.34kT} - 0.603e^{-13.66kT}$$

$$T = 0.1 \times \frac{1}{13.66} = 7.3 \text{ ms}$$

$$(*) \quad 0.5 + 0.103 \cdot (0.983)^k - 0.603 (0.905)^k$$

↓ Z

$$\frac{0.5z}{z-1} + \frac{0.103z}{z-0.983} - \frac{0.603z}{z-0.905}$$

$$\Rightarrow \bar{H}(z) = 0.5 + \frac{0.103(z-1)}{(z-0.983)} - \frac{0.603(z-1)}{(z-0.905)}$$

Resp. escalón: (*) $y_k = 0.5 + 0.103(0.983)^k - 0.603(0.905)^k$

Comperación:

t	k	y(t)	y _k
T	1	0.0556	0.0557
5T	5	0.2288	0.2289
10T	10	0.365	0.365



Examen de *Sistemas y Control*
e *Introducción a la Teoría de Control*
22 de diciembre de 2020

Solución del problema 2

Parte 1

Aplicando balances energéticos a cada tanque y modelando el caño como un retardo puro:

$$\begin{cases} c\rho V_1 \dot{T}_1(t) = c\rho Q T_{i1}(t) - c\rho Q T_1(t) + P(t), \\ c\rho V_2 \dot{T}_2(t) = c\rho Q T_1(t - t_d) - c\rho Q T_2(t), \end{cases} \text{ donde } t_d = \frac{AL}{Q}.$$

Parte 2

Sea $H(s)$ la matriz de transferencia tal que:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} T_{i1}(s) \\ P(s) \end{bmatrix}.$$

Aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones halladas en la parte 1, es fácil ver que

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1 s + 1} & \frac{G}{\tau_1 s + 1} \\ \frac{e^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} & \frac{G e^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \end{bmatrix}$$

$$\text{donde: } \tau_1 = \frac{V_1}{Q}, \quad \tau_2 = \frac{V_2}{Q}, \quad t_d = \frac{AL}{Q}, \quad G = \frac{1}{c\rho Q}.$$

Parte 3

Para cumplir con el requerimiento en régimen estacionario, el sistema de control debe ser de tipo 1. Como $H_{12}(s)$ no tiene polos en $s = 1$, el controlador debe aportar al menos un polo en $s = 0$. Por esto, se propone un controlador integral:

$$C(s) = \frac{K}{s}.$$

Con esta elección para $C(s)$, la transferencia de lazo abierto es:

$$L_1(s) = C(s)H_{12}(s) = \frac{KG}{s(\tau_1 s + 1)},$$

y la de lazo cerrado es:

$$H_1^{lc}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{donde } \zeta = \frac{1}{2\sqrt{\tau_1 KG}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{KG}{\tau_1}} = \frac{1}{2\tau_1 \zeta}.$$

Para cumplir con el requerimiento referente al sobretiro, debe cumplirse

$$\zeta \geq \sqrt{\frac{\ln^2 \frac{1}{5}}{\pi^2 + \ln^2 \frac{1}{5}}} \approx 0,4559,$$

o equivalentemente:

$$K \leq K_{\text{máx}}^{M_p} := \frac{1}{4 \frac{\ln^2 \frac{1}{5}}{\pi^2 + \ln^2 \frac{1}{5}}} \frac{1}{\tau_1 G} \approx 1,203 \frac{1}{\tau_1 G}. \quad (1)$$

Esbozando el diagrama de Bode de módulo de $L_1(s)$, se aprecia que la frecuencia de cruce de ganancia aumenta monótonamente con la ganancia K del controlador. Esbozando el diagrama de Bode de fase de $L_1(s)$, se aprecia que el margen de fase decrece monótonamente desde $\frac{\pi}{2}$ (para $K \rightarrow 0$) a 0 (para $K \rightarrow +\infty$). Entonces, existe un valor $K_{\text{máx}}^{MF}$ tal que el margen de fase es mayor o igual que $\frac{\pi}{3}$ si y solo si $K \leq K_{\text{máx}}^{MF}$.

Para $K = K_{\text{máx}}^{MF}$, el margen de fase es $\frac{\pi}{3}$ y la frecuencia de cruce de ganancia (ω_{cg}) verifica las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \angle L_1(j\omega_{cg}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau_1 \omega_{cg}) = -\pi + \frac{\pi}{3}, \\ |L_1(j\omega_{cg})| = \frac{K_{\text{máx}}^{MF} G}{\omega_{cg} \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega_{cg}^2}} = 1. \end{cases}$$

Despejando

$$\omega_{cg} = \frac{1}{\sqrt{3} \tau_1} \approx 0,5774 \frac{1}{\tau_1} \quad (2)$$

de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda se despeja $K_{\text{máx}}^{MF} = \frac{2}{3} \frac{1}{\tau_1 G}$. Entonces, para que el margen de fase sea mayor o igual que 60° se debe verificar:

$$K \leq K_{\text{máx}}^{MF} = \frac{2}{3} \frac{1}{\tau_1 G} \approx 0,6667 \frac{1}{\tau_1 G}. \quad (3)$$

Entre la dos condiciones (1) y (3), la más restrictiva es la (3).

Por otro lado, el tiempo de levantamiento (t_r) disminuye al disminuir la relación de amortiguamiento (ζ):

$$t_r = \begin{cases} \frac{0,366e^{2\zeta} + 0,6536}{\omega_n} = 2\tau_1 \zeta (0,366e^{2\zeta} + 0,6536) & \text{si } 0 < \zeta \leq 1, \\ \frac{2 \ln(9) \zeta - 1,0364}{\omega_n} = 2\tau_1 (2 \ln(9) \zeta^2 - 1,0364) & \text{si } 1 < \zeta. \end{cases}$$

Como además la relación de amortiguamiento disminuye al aumentar la ganancia K del controlador, se elige $K = K_{\text{máx}}^{MF}$, para minimizar el tiempo de levantamiento.

En conclusión, se elige

$$C(s) = \frac{K}{2} \quad \text{donde} \quad K = \frac{2}{3} \frac{1}{\tau_1 G}.$$

Parte 4

Ahora la transferencia de lazo abierto es

$$L_2(s) = C(s)H_{22}(s) = \frac{K}{s} \frac{Ge^{-tds}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = L_1(s) \frac{e^{-tds}}{\tau_2 s + 1}.$$

Como $V_2 \ll V_1$, se tiene que $\frac{1}{\tau_1} \ll \frac{1}{\tau_2}$, y entonces valen las siguientes aproximaciones para $\omega < \frac{1}{\tau_1}$:

$$|L_2(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega} \frac{Ge^{-t_d j\omega}}{(\tau_1 j\omega + 1)(\tau_2 j\omega + 1)} \right| = |L_1(j\omega)| \left| \frac{1}{\tau_2 j\omega + 1} \right| \approx |L_1(j\omega)|, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \angle L_2(j\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau_1 \omega) - \arctan(\tau_2 \omega) - t_d \omega \\ &\approx -\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau_1 \omega) - t_d \omega = \angle L_1(j\omega) - t_d \omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Como además, según (2), $\omega_{cg} < \frac{1}{\tau_1}$, las aproximaciones valen para ω cercana a ω_{cg} . La aproximación (4) permite concluir que la frecuencia de cruce de ganancia sigue siendo aproximadamente ω_{cg} . La aproximación (5) indica que el margen de ganancia se ve reducido en una cantidad igual a

$$t_d \omega_{cg} = t_d \frac{1}{\sqrt{3}\tau_1} = \frac{AL}{Q} \frac{Q}{\sqrt{3}V_1} = \frac{AL}{\sqrt{3}V_1}.$$

Para que el sistema controlado siga siendo estable, esta magnitud debe ser menor que $\frac{\pi}{3}$ (el margen de fase con el que se diseñó en la parte 3). Entonces, la propuesta del colega es factible, con el mismo controlador de la parte 3, si se cumple

$$\frac{AL}{V_1} < \sqrt{3} \frac{\pi}{3} \approx 1,814.$$

Parte 5

La transmitancia muestreada de $H_{12}(s)$ es:

$$\bar{H}_{12}(z) = \frac{G(1-p_1)}{z-p_1} \quad \text{donde} \quad p_1 = e^{-\frac{h}{\tau_1}}.$$

La transferencia de lazo cerrado es $\frac{C(z)\bar{H}_{12}(z)}{1+C(z)\bar{H}_{12}(z)}$, entonces

$$T_1(z) = \frac{C(z)\bar{H}_{12}(z)}{1+C(z)\bar{H}_{12}(z)} T_r(z),$$

donde

$$T_r(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{y} \quad T_1(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2} \frac{z}{z-1}$$

son las transformadas Z de la referencia y la salida, respectivamente.

Despejando $C(z)$,

$$C(z) = \frac{1}{\left(\frac{T_r(z)}{T_1(z)} - 1\right) \bar{H}_{12}(z)} = \frac{(z+1)(z-p_1)}{G(1-p_1)(2z^2 - z - 1)}.$$