Solución

1. Las ecuaciones que modelan el sistema son:

$$Q_I(t) - Q_O(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$
$$Q_O(t) = r(t)\sqrt{h(t)}$$
$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}Q_I(t) - \frac{1}{A}r(t)\sqrt{h(t)}}$$

2. Si la extracción es nula: $Q_O^0 = 0$ ($r_O^0 = 0$) y la altura es constante el ingreso de líquido al tanque debe ser nulo: $Q_I^0 = 0$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}Q_I(t) - \frac{1}{A}r_0\frac{1}{2}H_o^{-1/2}h(t) - \frac{1}{A}H_0^{1/2}r(t)$$

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}Q_I(t) - \frac{1}{A}H_0^{1/2}r(t) = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \times h(t) + \frac{1}{A}\begin{bmatrix}1 & -H_0^{1/2}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}Q_I(t) \\ r(t)\end{bmatrix}}$$

3. Como primer paso, determinamos el modelo discretizado de la planta antes estudiada (basado en su modelo lineal):

$$h_{k+1} = \Phi \times h_k + \Gamma \times \begin{bmatrix}Q_I^k \\ r_k\end{bmatrix}$$

Donde las matrices Φ y Γ se calculan a partir de las matrices A y B del modelo en variables de estado del sistema en tiempo continuo:

$$\boxed{\Phi = e^{AT_s} = \mathbb{1}}$$

$$\boxed{\Gamma = \int_0^{T_s} e^{As}ds \times B = T_s \times B = \frac{T_s}{A}\begin{bmatrix}1 & -H_0^{1/2}\end{bmatrix}}$$

Donde el modelo del tanque discretizado resulta:

$$\boxed{h_{k+1} = h_k + \frac{T_s}{A}\begin{bmatrix}1, & -H_0^{1/2}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}Q_I^k \\ r_k\end{bmatrix}}$$

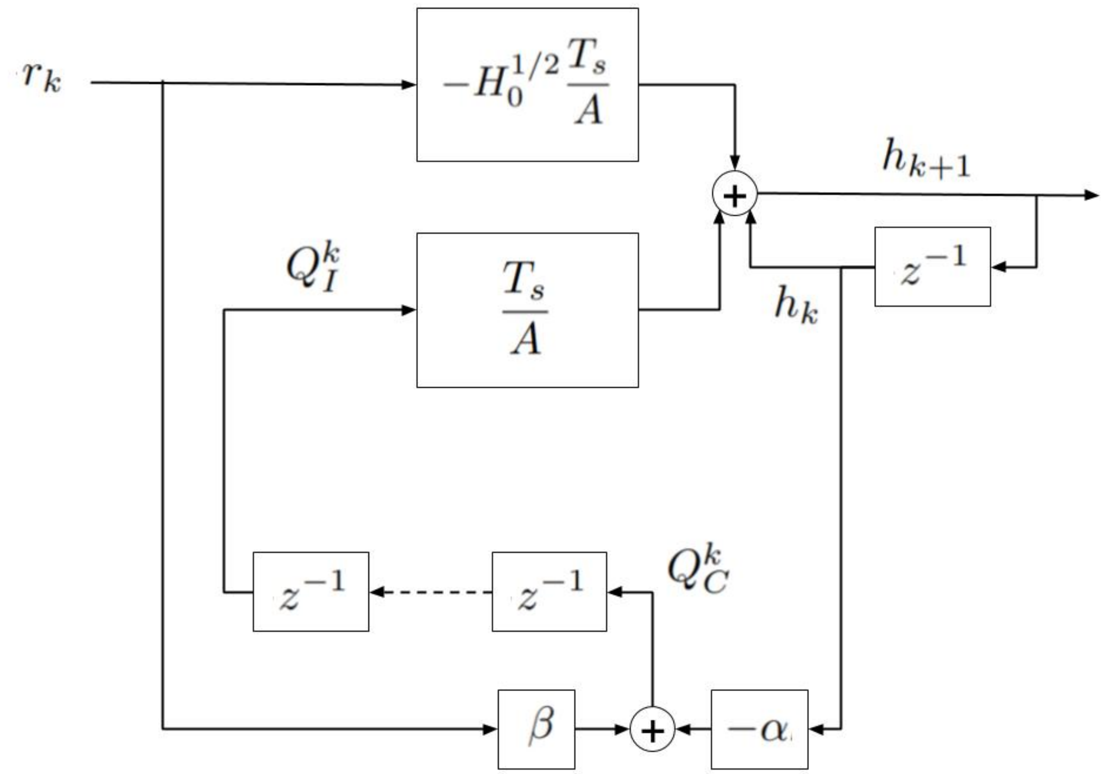
Adicionalmente, el retardo entre la acción de control y el ingreso del tanque se modela de la forma:

$$\boxed{Q_I^k = Q_C^{k-N}}$$

$$\begin{cases} h_{k+1} = h_k + \frac{T_s}{A}\begin{bmatrix}1, & -H_0^{1/2}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}Q_I^k \\ r_k\end{bmatrix} \\ Q_I^k = Q_C^{k-N} \\ Q_C^k = -\alpha h_k + \beta r_k \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$h_{k+1} = h_k + \frac{T_s}{A}\begin{bmatrix}1, & -H_0^{1/2}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-\alpha h_{k-N} + \beta r_{k-N} \\ r_k\end{bmatrix}$$
$$h_{k+1} = h_k + \left(-\alpha\frac{T_s}{A}\right)h_{k-N} + \left(\beta\frac{T_s}{A}\right)r_{k-N} + \left(-H_0^{1/2}\frac{T_s}{A}\right)r_k$$



El diagrama de bloques:

El estado del sistema dependerá de la altura del líquido en el tanque (h_k) y de el flujo de líquido acumulado en las cañerías y que aún no ingresó ($Q_c^k...Q_c^{k-N}$):

$$\boxed{\begin{bmatrix} h_{k+1} \\ Q_c^k \\ Q_c^{k-1} \\ \vdots \\ Q_c^{k-N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{T_s}{A} \\ -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_k \\ Q_c^{k-1} \\ Q_c^{k-2} \\ \vdots \\ Q_c^{k-N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_0^{\frac{1}{2}}\frac{T_s}{A} \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_k \end{bmatrix}}$$

4. Utilizando $N = 1$ se obtiene:

$$h_{k+1} = h_k - \alpha\frac{T_s}{A}h_{k-1} + \beta\frac{T_s}{A}r_{k-1} - H_0^{1/2}\frac{T_s}{A}r_k$$

$$\Rightarrow zH(z) = H(z) - \alpha\frac{T_s}{A}z^{-1}H(z) + \beta\frac{T_s}{A}z^{-1}R(z) - H_0^{1/2}\frac{T_s}{A}R(z)$$

$$G(z) = \frac{\beta\frac{T_s}{A}z^{-1} - H_0^{1/2}\frac{T_s}{A}}{z - 1 - \alpha\frac{T_s}{A}} = \frac{T_s}{A}\frac{\beta - H_0^{1/2}z}{z^2 - z + \alpha\frac{T_s}{A}}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{T_s}{A}\frac{\beta - H_0^{1/2}z}{z^2 - z + \alpha\frac{T_s}{A}}}$$

5. Como la transferencia es propia, la estabilidad dependerá de los ceros del denominador (los polos del sistema). El sistema será BIBO estable si el módulo de los polos es menor a 1. Para este caso, donde el denominador es de segundo orden, es posible utilizar el criterio de Jury, determinando las condiciones en los coeficientes del polinomio en forma gráfica.

   De esta manera se puede alcanzar la estabilidad si se cumple:

$$\alpha\frac{T_s}{A} < 1$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{\alpha < \frac{A}{T_s}}$$

6. La respuesta al escalón se puede calcular mediante la transferencia del sistema:

$$H(z) = G(z) \times \frac{z}{z-1}$$

Para el rango de valores de α determinados en la parte anterior los polos estarán contenidos en la circunferencia unidad. En este caso, el valor asintótico de la respuesta al escalón podrá determinarse mediante el teorema del valor final:

$$\lim_{k\to+\infty} h_k = \lim_{z\to 1} H(z) \times (z-1) = \frac{T_s}{A}\frac{\beta - H_0^{1/2}}{\alpha\frac{T_s}{A}}$$

Por lo tanto, para cumplir asintóticamente el objetivo de control se debe cumplir que:

$$\frac{T_s}{A}\frac{\beta - H_0^{1/2}}{\alpha\frac{T_s}{A}} = 0$$

Entonces:

$$\boxed{\beta = H_0^{1/2}}$$