Solución

Sensotronix : $\dot{v} + 10\,v = 150\,u$

Motor : $v = R_a \cdot i + K_m\,\dot{\theta}$

Eje : $T_m - B\dot{\theta} - C\theta = J\ddot{\theta}$ con $T_m = K_m\,i$

Tomando $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ v \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} T_m \\ \theta \end{bmatrix}$

Luego:

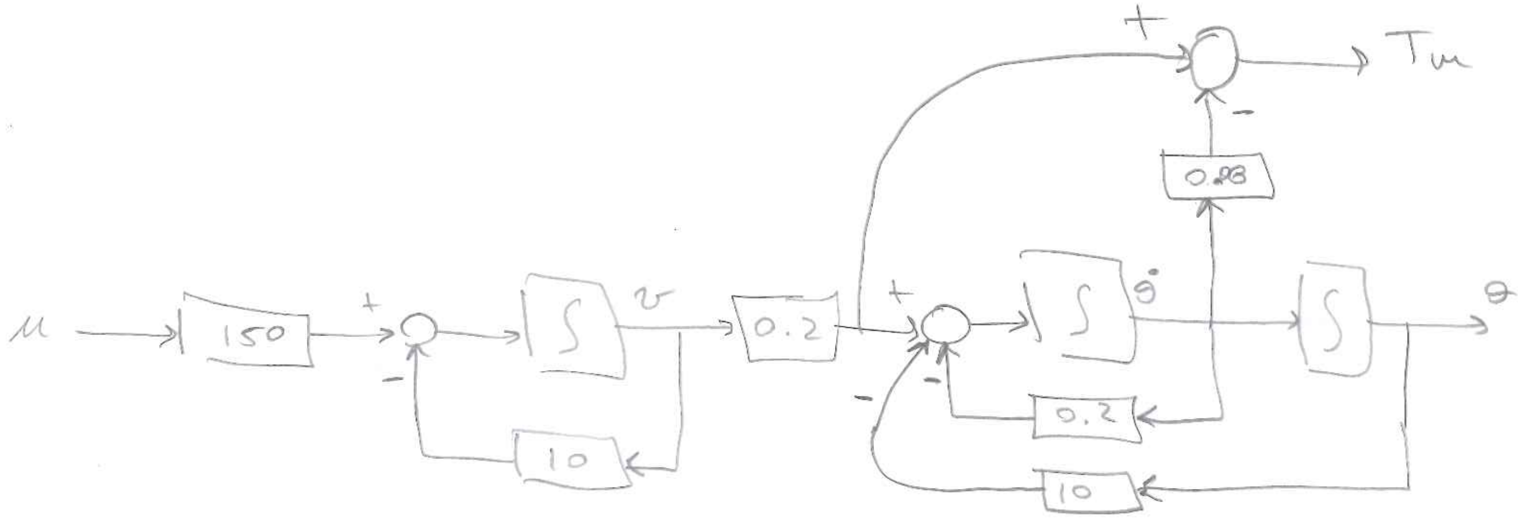
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C}{J} & \frac{-(BR_a + K_m^2)}{J \cdot R_a} & \frac{K_m}{J R_a} \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-K_m^2}{R_a} & \frac{K_m}{R_a} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.08 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con $\begin{cases} \dot{x} = A x + B \cdot u \\ y = C x + \emptyset \cdot u \end{cases}$

El diagrama de bloques queda:



La matriz de transferencia $M(s) = C(sId - A)^{-1}B$ queda:

$$M(s) = \frac{30}{(s+10)(s^2+0.2s+10)} \begin{bmatrix} s^2+0.12s+10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego:
$$H(s) = \frac{\theta}{u}(s) = \frac{30}{(s+10)(s^2+0.2s+10)} =$$

$$= \frac{30}{s^3+10.2s^2+12s+100}$$

$$G^{ol}(s) = K \cdot H(s)$$

$$G^{cl}(s) = \frac{\theta}{r}(s) = \frac{G^{ol}(s)}{1+G^{ol}(s)} =$$

$$= \frac{30K}{s^3+10.2s^2+12s+100+30K}$$

Aplico R-H:

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 12 \\ s^2 & 10.2 & 100+30K \\ s^1 & 12-\frac{100+30K}{10.2} & \\ s^0 & 100+30K & \end{array}$$

Luego: el sistema realimentado es estable sii $-\frac{10}{3} < K < \frac{56}{75}$

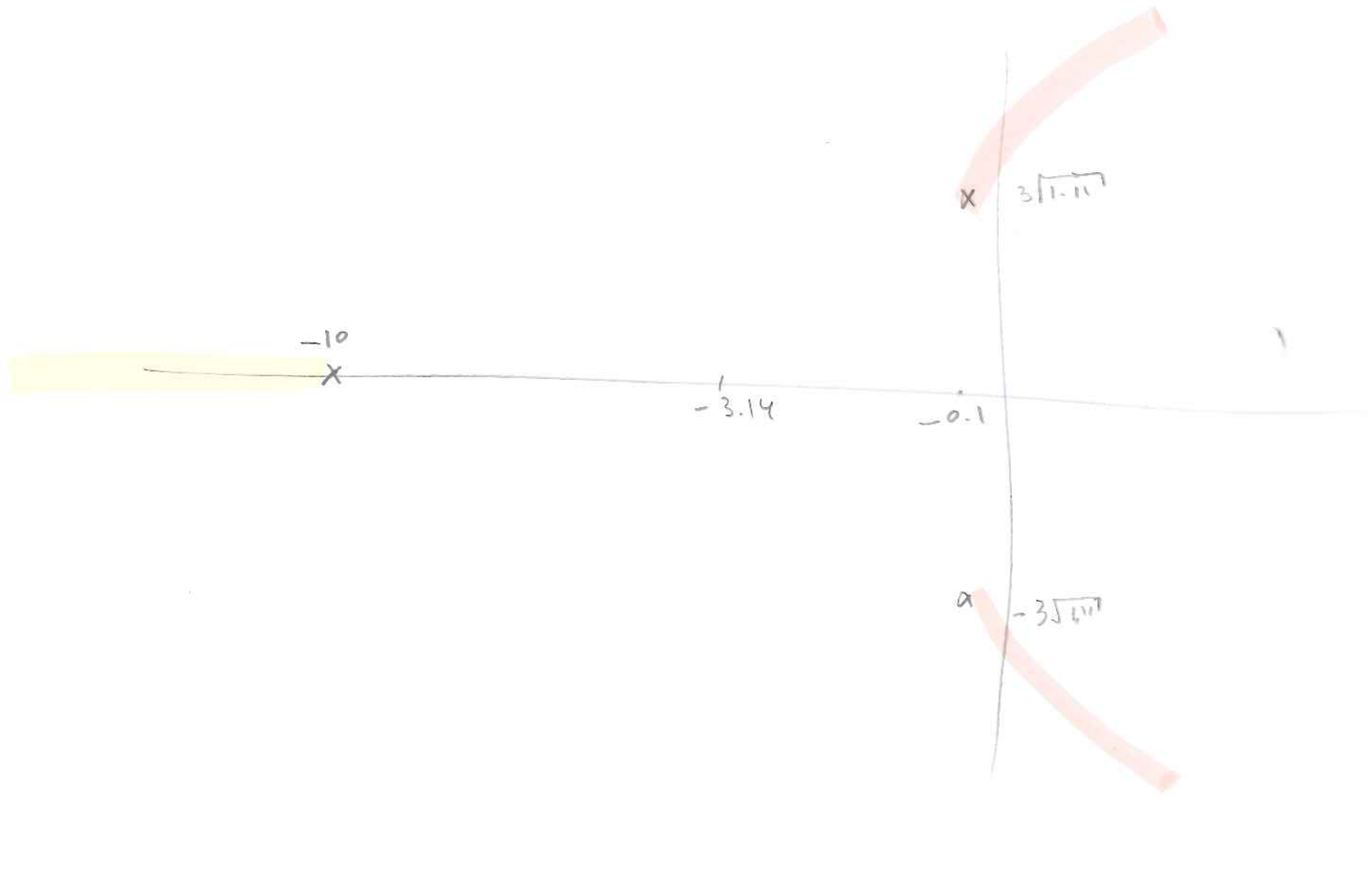
Para $K = -\frac{10}{3}$ tengo una raiz en el eje imaginario y para $K = \frac{56}{75}$ tengo dos raices en el eje.

- Polos de H : $\begin{cases} -10 \\ -0,1 \pm j\,3\sqrt{1.11} \end{cases}$
- Ceros : $\emptyset$
- 3 Ramas
- Centroide : $\dfrac{-10-0,1\ \ -0.1}{3} = -3,4$
- Eje real . $(-\infty, -10)$
- Ángulos de partida : $\varphi_{-10} = -180°$

$$\varphi_{-0.1+j3\sqrt{1.11}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{1.11}}{9.9}\right) = 72.3°$$

- Puntos multiples: $\dfrac{dH(s)}{ds} = 0 \leftrightarrow 3s^2 + 20.4s + 12 = 0$

↳ Raices negativas



Solución: Problema 1 – Parte 5

a)
Los polos dominantes de lazo abierto tienen parte real igual a $-\frac{1}{10}$.

Para que el tiempo de establecimiento del sistema controlado tenga un tiempo de establecimiento al menos un orden de magnitud menor con respecto al sistema sin controlar, es necesario que los polos dominantes del sistema realimentado tengan parte real menor a -1. Para lograr esto es necesario "soplar" las ramas del lugar geométrico de las raíces (LGR) hacia la izquierda, agregando un cero. Se propone:

$$G(s) = k(T_d s + 1).$$

El centroide del nuevo LGR es:

$$\sigma = \frac{-\frac{1}{10} - \frac{1}{10} - 10 + \frac{1}{Td}}{2} = -\frac{51}{10} + \frac{1}{2T_d}$$

Para que exista solución, debe cumplirse $\sigma < -1$, así que debe ser:

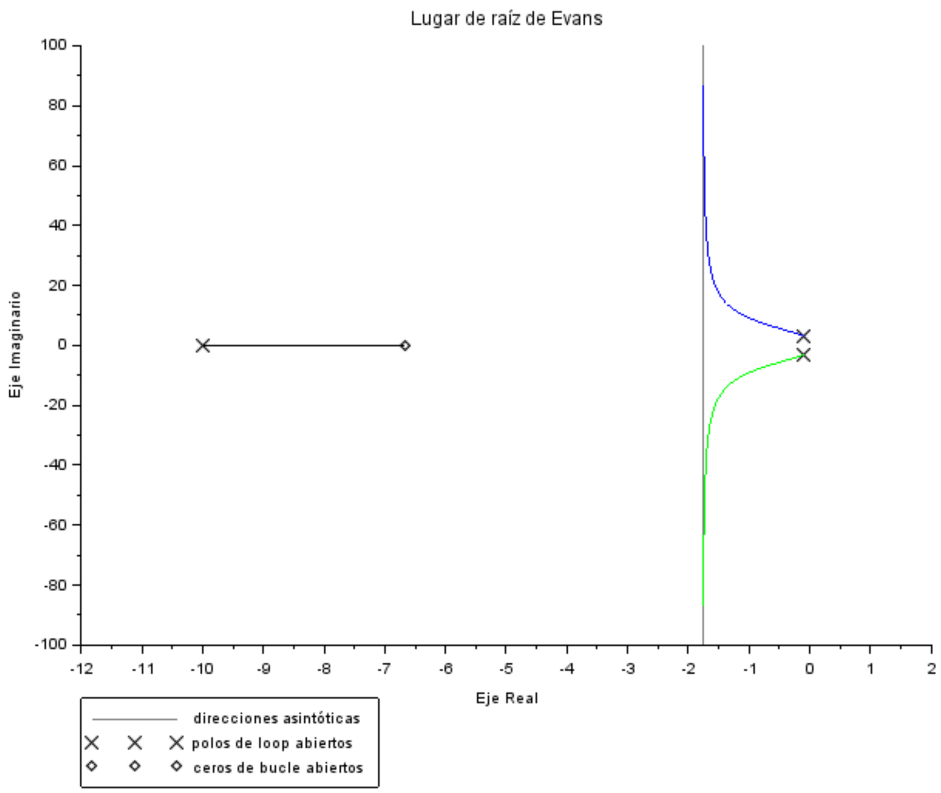
$$T_d > \frac{5}{41} \cong 0{,}123$$

A continuación se explicita una de las múltiples soluciones posibles.

Tomando un 23 % de margen de seguridad, se elige:

$$T_d = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

Luego, alcanza con elegir k suficientemente grande para que los polos dominantes de lazo cerrado tengan parte real menor que -1.



La transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{30k\left(\frac{3}{20}s+1\right)}{s^3+\frac{51}{5}s^2+\left(\frac{9}{2}k+12\right)s+30k+100}$$

Tanteando, se encuentra que con $k=30$, se obtienen los siguientes polos de lazo cerrado:

$$-1{,}20 \pm 11{,}3j \quad \text{y} \quad -7{,}80$$

El cero del lazo cerrado, es:

$$-\frac{1}{T_d}=-\frac{20}{3}\cong -6{,}67$$

Como el valor absoluto de la parte real de los polos complejos conjugados es menor que la quinta parte de del valor absoluto de los restantes ceros y polos del lazo cerrado, los polos complejos conjugados son polos dominantes.

b)

El error en régimen estacionario es

$$\frac{1}{1+K_P}\cong 0{,}1\,rad$$

donde $K_P=\left.\frac{30k\left(\frac{3}{20}s+1\right)}{\left(s^2+\frac{1}{5}s+10\right)(s+10)}\right]_{s=0}=9.$