Problema 1

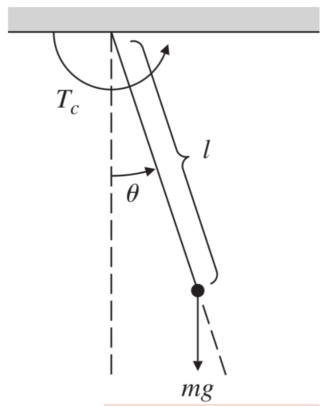

Figure 1: Modelo simple de sistema de posición especular.

Un laboratorio de óptica cuenta con un sistema de espejos controlable por computadora. Cada espejo se modela como un péndulo simple de masa m y largo l que es posible controlar a través de un torque externo T_c como se muestra en la figura 1.

a) Definiendo $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $u = T_c/ml^2$, $y = \theta$ encuentre una representación de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

b) Linealice el sistema respecto al punto de operación $X_s = [\ \pi/4, 0\ ]^T$, y halle la entrada U_s necesaria para que el sistema opere en X_s.

c) Deduzca el sistema discreto correspondiente a muestrar el sistema continuo con un MOC de $T_s = 0.1s$. Para esta parte considere $\frac{g}{l} = 10s^{-2}$.

d) Demuestre que el sistema es controlable.

e) Diseñe una realimentación de estados para que el sistema realimentado tenga todos sus polos en 0.

Solución

a) De plantear torques se obtiene la ecuación

$$I\ddot{\theta} = T_c - mgl\sin(\theta)$$

además, $I = ml^2$, de donde

$$\ddot{\theta} = \frac{T_c}{ml^2} - \frac{g}{l}\sin(\theta)$$

Con las definiciones de la letra se llega a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(x_1) + u \end{bmatrix}$$

b) De $\dot{X}_{2s} = -\frac{g}{l}\sin(X_{1s}) + U_s = 0$ se obtiene $U_s = \frac{g}{l}\sin(\frac{\pi}{4})$. Para linealizar, utilizamos

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \tilde{x}_1) = \sin(\frac{\pi}{4}) + cos(\frac{\pi}{4})\tilde{x}_1$$

llegando al siguiente sistema lineal en variables de estado:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tilde{u}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\tilde{u}$$

c) Para sistemas en tiempo discreto, $\Phi = e^{AT_s} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}|_{t=T}$. De invertir la matriz $(sI - A)^{-1}$ resulta:

$$\frac{1}{s^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{10}{\sqrt{2}} & s \end{bmatrix}$$

antitransformando y evaluando, obtenemos

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}T_s) & \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}}\sin(\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}T_s) \\ \sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}\sin(\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}T_s) & \cos(\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}T_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.965 & 0.099 \\ -0.699 & 0.965 \end{bmatrix}$$

Por otro lado

$$\Gamma = \int_0^{T_s} e^{At}Bdt = \begin{bmatrix} \int_0^{T_s} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}} \sin(\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}t)dt \\ \int_0^{T_s} \cos(\sqrt{\frac{10}{\sqrt{2}}}t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

de donde el modelo en variables de estado resulta:

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.965 & 0.099 \\ -0.699 & 0.965 \end{bmatrix} \tilde{x}_k + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.100 \end{bmatrix} \tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_k$$

d) Para un sistema de orden $n = 2$, tendremos controlabilidad si la matriz $C = \Gamma, \Phi\Gamma$ es de rango completo. Operando llegamos a

$$C = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.014725 \\ 0.1 & 0.093005 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es $\Delta = -0.001$. Al ser diferente de cero, se concluye que el sistema es controlable.

e) Se realimenta por medio de una realimentación de estados. Esto es $u_k = -Kx_k$ con $K = [k_1, k_2]$. De esta forma, se llega a $x_{k+1} = \Phi_{cl}x_k$ con

$$\Phi_{cl} = \Phi - \Gamma K = \begin{bmatrix} 0.965 - 0.005k_1 & 0.099 - 0.005k_2 \\ -0.699 - 0.1k_1 & 0.965 - 0.1k_2 \end{bmatrix}$$

de imponer $(z-p_1)(z-p_2) = z^2 = \det(zI - \Phi_{cl})$ se obtienen los valores de $k_1 = 92.258$, $k_2 = 14.687$.