Introducción a la Teoría de Control - Examen 17/07/2019
Solución del problema 2

Parte 1

a) Representación en variables de estado

Balances volumétricos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_T H) = S_T \dot{H} = A + U - Q, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X S_T H) = \dot{X} S_T H + X S_T \dot{H} = A - XQ. \tag{2}$$

Caudal de salida:

$$Q = K\sqrt{H}. \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$S_T \dot{H} = -K\sqrt{H} + A + U. \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (2)

$$\dot{X} S_T H + X\left(-K\sqrt{H} + A + U\right) = A - XK\sqrt{H},$$

$$S_T \dot{X} H = A - XK\sqrt{H} - X\left(-K\sqrt{H} + A + U\right),$$

$$S_T \dot{X} H = (1 - X)\,A - XU. \tag{5}$$

Agrupando (4) y (5):

$$\begin{cases} S_T \dot{H} = -K\sqrt{H} + A + U, \\ S_T \dot{X} H = (1 - X)\,A - XU. \end{cases}$$

Tomando H y X como variables de estado, se tiene la siguiente representación en variables de estado para el sistema de entradas A y U, y salidas H y X.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} H \\ X \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} H \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{K}{S_T}\sqrt{H} + \frac{A+U}{S_T} \\ \frac{(1-X)A}{S_T H} - \frac{XU}{S_T H} \end{bmatrix}, \\ \\ \begin{bmatrix} H \\ X \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} H \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ X \end{bmatrix}. \end{cases}$$

b) Punto de operación

En equilibrio, con $A = A_0$ y $U = U_0$ (constantes):

$$\begin{cases} 0 = -K\sqrt{H_0} + A_0 + U_0, \\ 0 = (1 - X_0)\, A_0 - X_0 U_0. \end{cases}$$

Despejando H_0 y X_0,

$$\begin{cases} H_0 = \left(\frac{A_0+U_0}{K}\right)^2, \\ X_0 = \frac{A_0}{A_0+U_0}. \end{cases}$$

Parte 2

a) Linealización

Sean: $h = H - H_0$, $x = X - X_0$, $a = A - A_0$, $u = U - U_0$.
La linealización de la representación en variables de estado de la parte 1.a) en torno al punto operación genérico de la parte 1.b) es

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial H} & \frac{\partial f}{\partial X} \end{bmatrix}\Big|_{\text{op.}} \begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial A} & \frac{\partial f}{\partial U} \end{bmatrix}\Big|_{\text{op.}} \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial H} & \frac{\partial g}{\partial X} \end{bmatrix}\Big|_{\text{op.}} \begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial A} & \frac{\partial g}{\partial U} \end{bmatrix}\Big|_{\text{op.}} \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Calculando,

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{2S_T\sqrt{H_0}} & 0 \\ \underbrace{-\frac{(1-X_0)\,A_0 - X_0U_0}{S_T H_0^2}}_{=0} & \underbrace{-\frac{A_0+U_0}{S_T H_0}}_{-\frac{K}{S_T\sqrt{H_0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_T} & \frac{1}{S_T} \\ \frac{1-X_0}{S_T H_0} & -\frac{X_0}{S_T H_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ x \end{bmatrix}. \end{cases}$$

b) Matriz de transferencia

La matriz de transferencia del proceso de mezclado es

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{h}{a}(s) & \frac{h}{u}(s) \\ \frac{x}{a}(s) & \frac{x}{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_T}\left(\frac{1}{s+\frac{\alpha}{2}}\right) & \frac{1}{S_T}\left(\frac{1}{s+\frac{\alpha}{2}}\right) \\ \frac{1-X_0}{S_T H_0}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) & -\frac{X_0}{S_T H_0}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{K}{S_T\sqrt{H_0}}.$$

o equivalentemente,

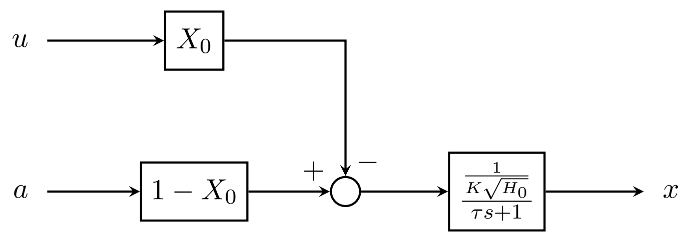
$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{h}{a}(s) & \frac{h}{u}(s) \\ \\ \frac{x}{a}(s) & \frac{x}{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{H_0}}{K}\left(\frac{1}{2\tau s+1}\right) & \frac{2\sqrt{H_0}}{K}\left(\frac{1}{2\tau s+1}\right) \\ \\ \frac{1-X_0}{K\sqrt{H_0}}\left(\frac{1}{\tau s+1}\right) & -\frac{X_0}{K\sqrt{H_0}}\left(\frac{1}{\tau s+1}\right) \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \tau = \alpha^{-1} = \frac{S_T\sqrt{H_0}}{K}.$$

c) Diagrama de bloques del subsistema de entradas a y u y salida x

La última fila de la matriz de transferencia describe al subsistema de entradas a y u, y salida x:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1-X_0}{K\sqrt{H_0}}\left(\frac{1}{\tau s+1}\right) a\,(s) - \frac{X_0}{K\sqrt{H_0}}\left(\frac{1}{\tau s+1}\right) u\,(s) \\ &= \frac{\frac{1}{K\sqrt{H_0}}}{\tau s+1}\left(\left(1-X_0\right) a\,(s) - X_0 u\,(s)\right). \end{aligned}$$

Este subsistema se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques:



Parte 3

Observando el diagrama de bloques de la parte anterior, se encuentra que el efecto de las fluctuaciones en el caudal del líquido 2 sobre la concentración del líquido 1 en la mezcla (y en el caudal de salida) se puede compensar completamente tomando:

$$F(s) = \frac{X_0}{1-X_0}.$$

Parte 4

Sea

$$P(s) = \frac{x}{a}(s) = \gamma\left(\frac{1}{\tau s+1}\right) \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{1-X_0}{K\sqrt{H_0}} = \frac{1-X_0}{A_0+U_0} = 6{,}25.$$

Observando la matriz de transferencia hallada en la parte 2.b) se reconoce que hay dos constantes de tiempo involucradas en el proceso de mezclado: τ y 2τ. El período de muestreo se elige igual a la décima parte de la *menor* de estas constantes de tiempo, por lo tanto

$$T = \frac{\tau}{10}.$$

La transmitancia muestreada de $P(s) = \gamma \left(\frac{1}{\tau s+1}\right)$ es

$$\bar{P}(z) = \gamma \left(\frac{1-p}{z-p}\right), \quad \text{donde} \quad \gamma = 6{,}25 \quad \text{y} \quad p = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{1}{10}\right) \approx 0{,}9048.$$

Para que ante una rampa de tiempo discreto de pendiente $\frac{1}{10}$ el error en régimen estacionario sea menor que $\frac{1}{100}$, se debe cumplir que el lazo cerrado sea estable, de tipo 1 o mayor y $\frac{\frac{1}{10}}{K_v} < \frac{1}{100}$, o equivalentemente,

$$K_v > 10,$$

donde $K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)\,C(z)\bar{P}(z)$ es la constante de error de velocidad estática del lazo cerrado.

Como $\bar{P}(z)$ no tiene polo alguno en $z=1$, la función $C(z)$ debe tener al menos un polo en $z=1$ para que el lazo cerrado sea de tipo 1.

Para que el lazo cerrado sea estable todos los polos de su función de transferencia,

$$R(z) = \frac{C(z)\bar{P}(z)}{1 + C(z)\bar{P}(z)},$$

deben tener módulo menor que 1.

Primera aproximación (control integral)

Como primera aproximación al diseño definitivo se toma:

$$C(z) = G\frac{1}{z-1}, \quad \text{donde} \quad G \in \mathbb{R}.$$

En este caso, $K_v = G\gamma$ y la función de transferencia de lazo cerrado es

$$R(z) = \frac{G\gamma\,(1-p)}{(z-1)\,(z-p) + G\gamma\,(1-p)} = \frac{G\gamma\,(1-p)}{z^2 \underbrace{-\,(1+p)}_{a}\, z + \underbrace{p + G\gamma\,(1-p)}_{b}}.$$

Para que todos sus polos tengan módulo menor que 1, se debe cumplir:

$$\begin{cases} b < 1 \iff G < \gamma^{-1}, \\ b > -a-1 \iff G > 0, \\ b > a-1 \iff G > -2\gamma^{-1}\frac{(1+p)}{(1-p)}. \end{cases}$$

Como debe ser $G < \gamma^{-1}$, la constante K_v queda acotada por 1. Por lo tanto, no es posible imponer $K_v > 10$ sin inestabilizar el lazo cerrado. Consecuentemente, se descarta esta primera aproximación.

Segunda aproximación (control proporcional-integral)

Se propone agregar un cero a la transferencia del controlador de forma tal de "soplar" las dos ramas del lugar geométrico positivo (de los polos de lazo cerrado), paramétrico en G, hacia dentro del círculo unitario. Se toma entonces

$$C(z) = \frac{G}{1-c}\left(\frac{z-c}{z-1}\right) = \frac{G}{1-c}\left(1+\frac{1-c}{z-1}\right), \quad \text{donde} \quad G>0 \quad \text{y} \quad c \in (-1,1)\,.$$

En este caso, $K_v = G\gamma$ y la función de transferencia de lazo cerrado es

$$R(z) = \frac{\frac{G\gamma}{1-c}(1-p)(z-c)}{(z-1)(z-p)+\frac{G\gamma}{1-c}(1-p)(z-c)} = \frac{\frac{G\gamma}{1-c}(1-p)(z-c)}{z^2 \underbrace{-\left((1+p)-G\gamma\frac{1-p}{1-c}\right)}_{a} z + \underbrace{p - G\gamma\frac{1-p}{1-c}c}_{b}}.$$

Para que todos sus polos tengan módulo menor que 1, se debe cumplir:

$$\begin{cases} b<1 \iff -cG < \gamma^{-1}(1-c) \iff \begin{cases} G > -\gamma^{-1}\left(\frac{1-c}{c}\right) & \text{si } c\in(0,1)\,,\\ G < -\gamma^{-1}\left(\frac{1-c}{c}\right) & \text{si } c \in (-1,0)\,,\end{cases}\\ b > -a-1 \iff G>0,\\ b > a-1 \iff G < 2\gamma^{-1}\frac{\frac{(1+p)}{(1-p)}}{\frac{(1+c)}{(1-c)}}.\end{cases}$$

En la última condición se observa que para que $K_v = G\gamma$ pueda ser mayor que 10 es necesario que $\frac{\frac{(1+p)}{(1-p)}}{\frac{(1+c)}{(1-c)}} > 5$, lo cual es equivalente a $c < \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)-1}{1+\frac{1}{5}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)} \approx 0,6$. Por otro lado, de la condición $G < -\gamma^{-1}\left(\frac{1-c}{c}\right)$, que aplica en el caso $c \in (-1,0)$, se desprende que para que $K_v = G\gamma$ pueda ser mayor que 10 es necesario que $\frac{1-c}{-c} > 0$, lo cual equivale a $c > -\frac{1}{9} \approx -0,11$. En definitiva, se concluye que c se debe elegir de forma tal que:

$$-0,11 \approx -\frac{1}{9} < c < \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)-1}{1+\frac{1}{5}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)} \approx 0,6.$$

Para no diseñar al límite de las restricciones anteriores se elige: $\boxed{c = 0,25}$. Con esta elección de c, la elección de G queda restringida al intervalo

$$0 < G < 2\gamma^{-1}\frac{\frac{(1+p)}{(1-p)}}{\frac{(1+c)}{(1-c)}} \approx 3{,}84.$$

Para no diseñar al límite de las restricciones se elige $\boxed{G = 1{,}92}$.

Para los valores elegidos, $K_v \approx 12$ (mayor que 10) y los polos de la transferencia de lazo cerrado quedan en $z \approx 0{,}19 \pm 0{,}70\jmath$ con módulo aproximadamente igual a $0,72$ (menor que 1).

Parte 5

La transformada Z de la señal de salida del controlador es:

$$Y(z) = \frac{G}{1-c}\left(\frac{z-c}{z-1}\right)E(z),$$

donde $E(z)$ es la transformada Z de la señal de error.

Introduciendo

$$W(z) = \frac{1}{z-1}E(z),$$

se tiene que

$$Y(z) = \frac{G}{1-c}\,(z-c)\,W(z).$$

Antitransformando,

$$\begin{cases} w\left(k+1\right) = e\left(k\right) + w\left(k\right), \\ y\left(k\right) = \frac{G}{1-c}\left(w\left(k+1\right) - cw\left(k\right)\right). \end{cases}$$

A partir de estas ecuaciones en diferencias se propone la siguiente realización del controlador: