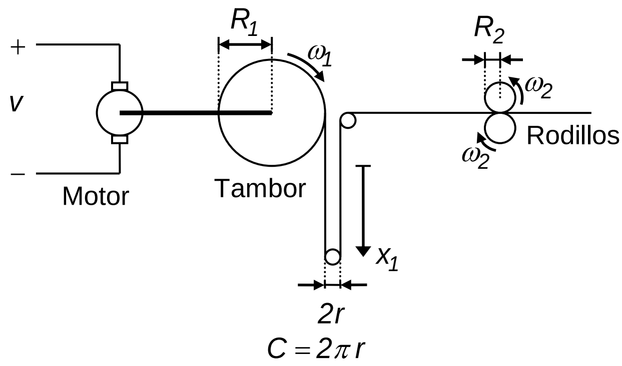
Carrera: INGENIERÍA ELÉCTRICA — **Instituto de Ingeniería Eléctrica**
Materia: CONTROL
Asignatura: INTRODUCCIÓN A LA TORÍA DE CONTROL — **Departamento de Sistemas y Control**
Plan: 97
Fecha: 17/7/2019 — **PERIODO: JULIO 2019**

Problema 1 (solución)

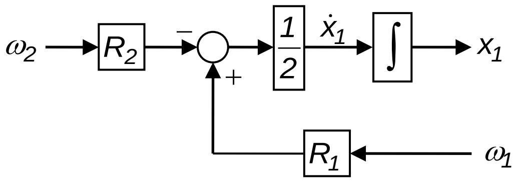
1) Modelo



Balance sobre el largo de cinta que cuelga por debajo de la posición de referencia fija ($x_1 = 0$):

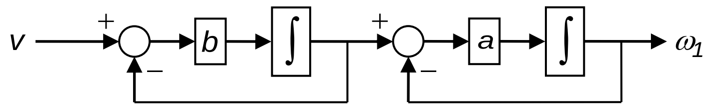
$$\frac{d}{dt}\left(2x_1 + \frac{C}{2}\right) = R_1\omega_1 - R_2\omega_2,$$

donde C es la circunferencia del rodillo danzarin. Entonces $2\dot{x}_1 = R_1\omega_1 - R_2\omega_2$ que se representa mediante:

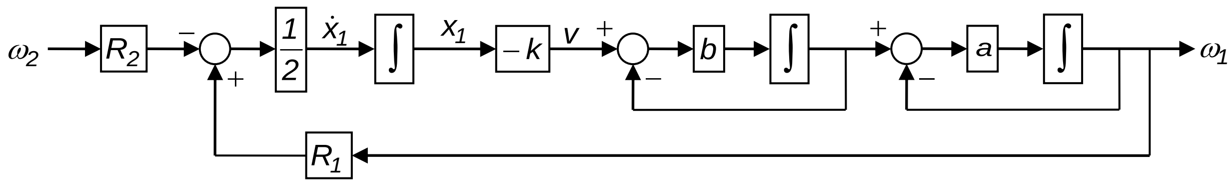


El motor cargado se modela mediante: $\omega_1(s) = \left(\frac{a}{s+a}\right)\left(\frac{b}{s+b}\right)v(s) = \left(\frac{\frac{a}{s}}{1+\frac{a}{s}}\right)\left(\frac{\frac{b}{s}}{1+\frac{b}{s}}\right)v(s)$.

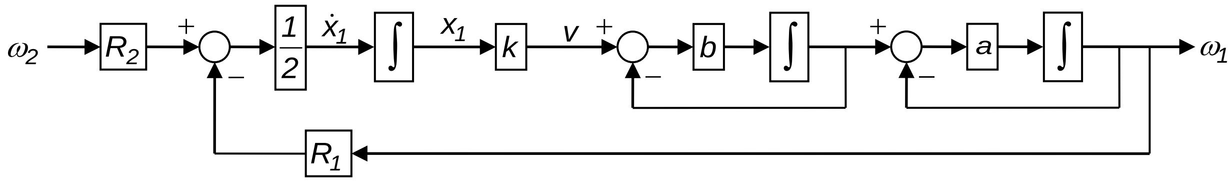
Entonces:



Como además $v = -kx_1$, el diagrama de bloques completo es:



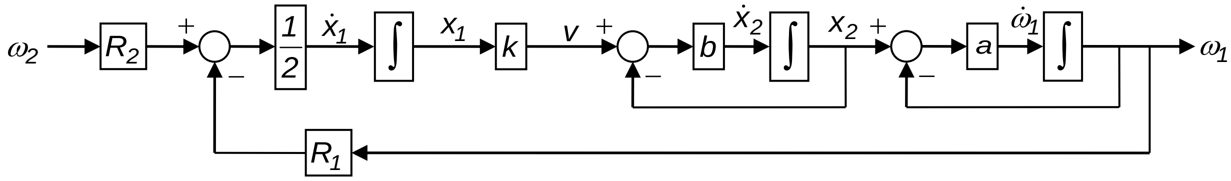
o equivalentemente:



Se trata de un sistema de control *integral* de velocidad. La realimentación se produce en la parte la de cinta acumulada entre el tambor y los rodillos. La función de transferencia del sistema realimentado es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}(s) = R_2 \frac{\frac{k}{2s} \cdot \frac{ab}{(s+a)(s+b)}}{1 + R_1 \cdot \frac{k}{2s} \cdot \frac{ab}{(s+a)(s+b)}} = \frac{kR_2 ab}{2s(s+a)(s+b) + kR_1 ab} = \frac{k\frac{R_2 ab}{2}}{s^3 + (a+b)s^2 + abs + k\frac{R_1 ab}{2}}.$$

Para hallar una representación en variables de estado, sea x_2 como se indica a continuación:



A partir del diagrama de bloques anterior se obtiene la siguiente representación en variables de estado, donde ω_2 es la entrada, ω_1 es la salida, y $[x_1 \quad x_2 \quad \omega_1]^T$ es el vector de estado:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{R_1}{2} \\ bk & -b & 0 \\ 0 & a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\omega_2] \\ \omega_1 = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

<u>2) Estabilidad</u>

El polinomio característico del sistema es: $d(s) = s^3 + (a+b)s^2 + abs + k\frac{R_1 ab}{2}$. El arreglo de Routh–Hurwitz es el siguiente:

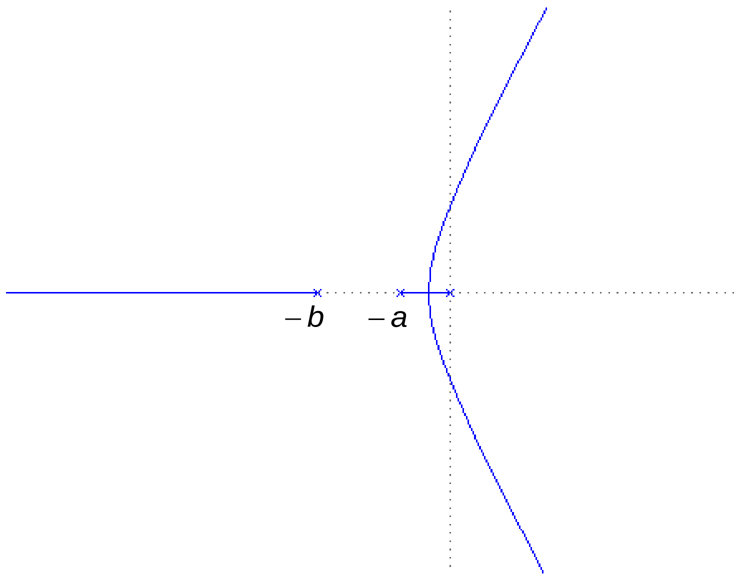
s^3	1	ab
s^2	$a+b$	$\frac{kR_1 ab}{2}$
s^1	$\frac{(a+b)ab - \frac{kR_1 ab}{2}}{a+b}$	
s^0	$\frac{kR_1 ab}{2}$	

El sistema es estable si y solo si $k < \frac{2(a+b)}{R_1}$.

<u>3) Amortiguamiento crítico</u>

El polinomio característico es: $d_k(s) = p(s) + kq(s)$ donde $p(s) = s(s+a)(s+b)$ y $q(s) = \frac{R_1 ab}{2}$.

El lugar geométrico positivo (LGP) de las raíces de $d_k(s)$ (paramétrico en k) es el siguiente:



Los candidatos a punto múltiple son las soluciones de $q'(s)p(s)-q(s)p'(s)=0$. Es decir, las soluciones de $\frac{R_1ab}{2}\left(3s^2+2(a+b)s+ab\right)=0$, que son:

$$s_{1,2}=\frac{-2(a+b)\pm\sqrt{4(a+b)^2-4\cdot 3\cdot ab}}{2\cdot 3}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{(b-a)^2+ab}}{3}.$$

La solución que pertenece al LGP es: $s_1=\frac{-(a+b)+\sqrt{(b-a)^2+ab}}{3}$.

Para que el sistema tenga amortiguamiento crítico se debe elegir $k=k_1=-\frac{p(s_1)}{q(s_1)}$. Para esta elección de k, la mayor constante de tiempo del sistema es: $\tau_1=-s_1^{-1}=\frac{3}{a+b-\sqrt{(b-a)^2+ab}}$.

4) Mayor constante de tiempo menor que a^{-1}

Para que la mayor constante de tiempo sea menor que a^{-1} todos los polos del sistema deben tener parte real menor que $-a$. Si $C(s)=1$, a partir del LGP dibujado en el punto anterior, se conlculye que no es posible cumplir con el requerimiento.

Es necesario "soplar las ramas hacia la izquierda". Para esto se introduce un cero: $C(s)=s+c$. El centroide del LGP de las raíces de $p(s)+kC(s)q(s)$ es $\sigma=\frac{-b-a-(-c)}{2}$. Para que $\sigma<-a$ se debe verificar:

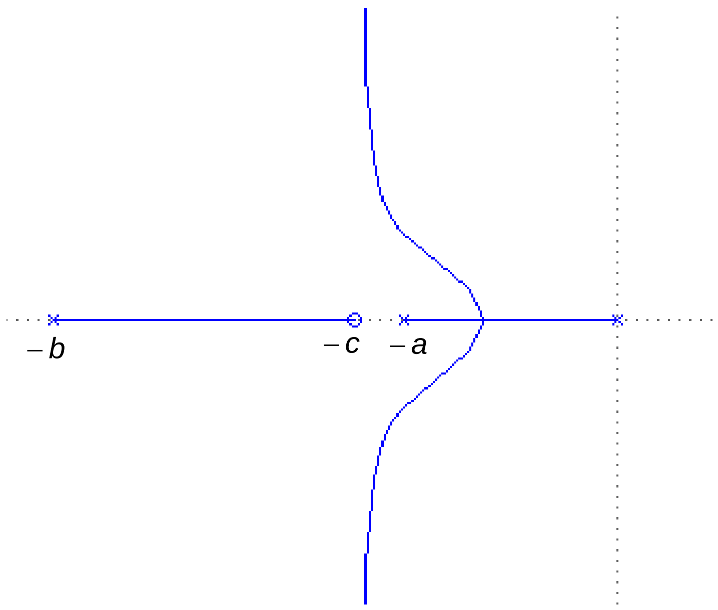
$$c<b-a. \quad \text{(I)}$$

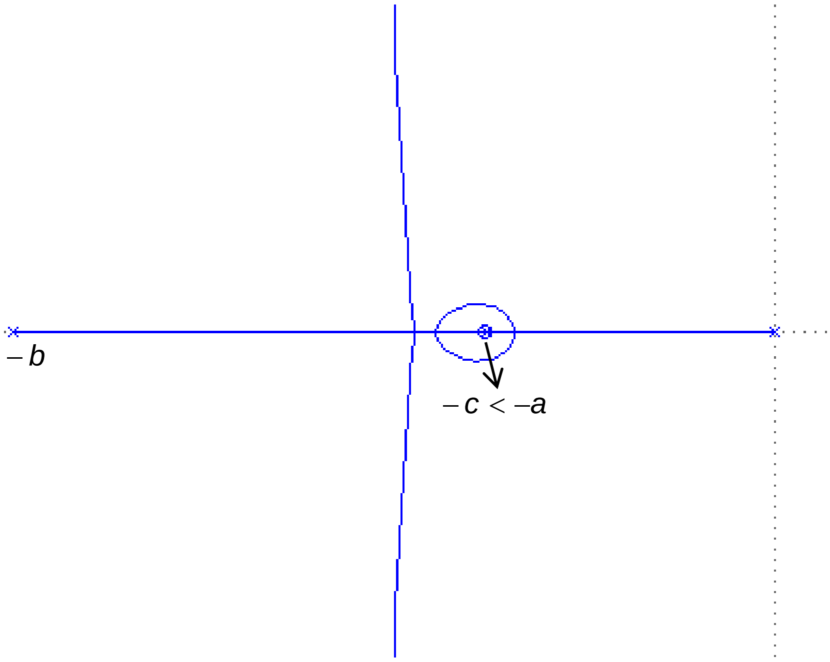
Pero con (I) no alcanza porque si $c<a$, para todo $k>0$ el sistema tiene un polo real mayor que $-a$. Entonces, además de (I) debe verificarse:

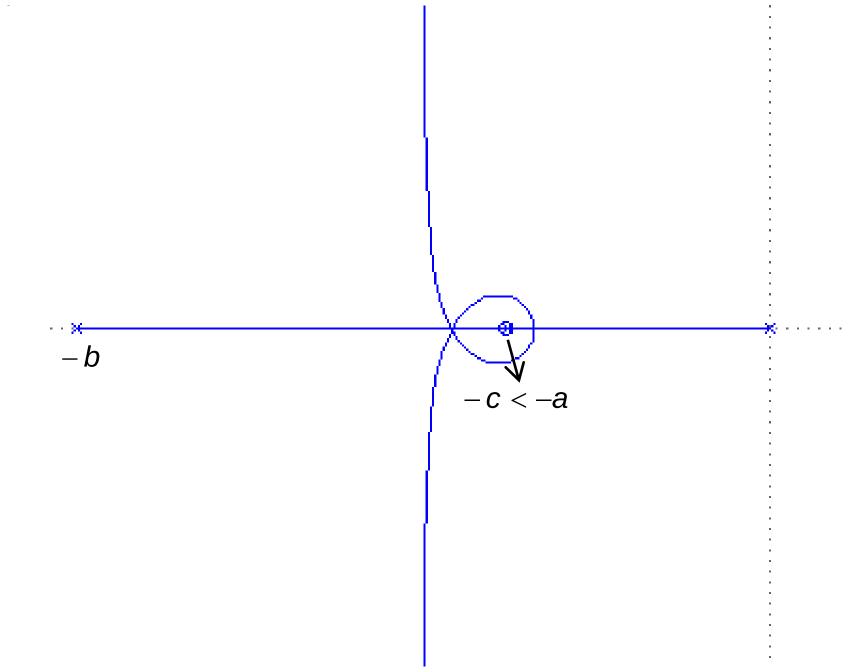
$$a<c. \quad \text{(II)}$$

Se descarta la posibilidad $c = a$ porque implica una cancelación cero-polo.

En definitiva, c debe elegirse de forma tal que: $a < c < b - a$, lo cual es posible porque $2a < b$. Eligiendo c de esta manera, el LGP de las raíces de $p(s) + kC(s)q(s)$ es alguno de los siguientes:







En cualquier caso, para k suficientemente grande se puede lograr que todos los polos del sistema tengan parte real menor que $-a$.