Problema 1 (solución)

1) Modelo

Segunda Ley de Newton aplicada a la pelota: $m\ddot{y} = \frac{b}{2}\left(v_A - \dot{y}\right)^2 - mg$ donde $v_A = K\frac{\omega}{y}$.
Modelo en varialbes de estado:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \frac{b}{2m}\left(K\frac{\omega}{y} - \dot{y}\right)^2 - g \end{bmatrix}, \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

2) Punto de equilibrio

La única velocidad angular (constante) para la cual y_0 es un punto de equilibrio es:

$$\omega = \omega_0 = \frac{y_0}{K}\sqrt{\frac{2mg}{b}}.$$

3) Linealización

Sean $\tilde{y} = y - y_0$ y $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$. El modelo en variables de estado linealizado es:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{my_0}\left(\frac{K\omega_0}{y_0}\right)^2 & -\frac{b}{m}\left(\frac{K\omega_0}{y_0}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{m\omega_0}\left(\frac{K\omega_0}{y_0}\right)^2 \end{bmatrix}\tilde{\omega} \\
\tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

En forma equivalente,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2g}{y_0} & -\sqrt{2g\frac{b}{m}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2g}{\omega_0} \end{bmatrix}\tilde{\omega}, \\
\tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix};
\end{aligned}
$$

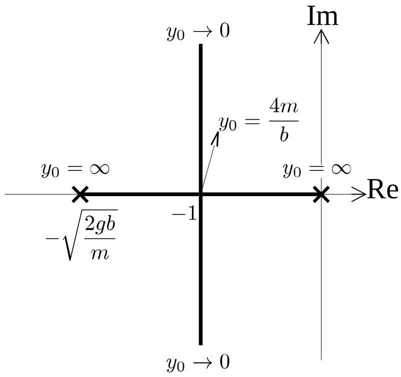
o también,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2g}{y_0} & -\sqrt{2g\frac{b}{m}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\sqrt{\frac{1}{2g}\frac{b}{m}}\frac{2g}{y_0} \end{bmatrix}\tilde{\omega}, \\
\tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4) Análisis del modelo linealizado

a) F. de transf.: $P(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\omega}}(s) = \frac{G{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$ donde $G = K\sqrt{\frac{1}{2g}\frac{b}{m}}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{y_0}}$, y $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{m}y_0}$. La ganancia en régimen estacionario de $P(s)$ es G.

b) Los polos de $P(s)$ son las raíces del polinomio: $d_{y_0}(s) = s\left(s + \sqrt{\frac{2gb}{m}}\right) + \frac{2g}{y_0}$. El lugar geométrico de estas raíces, paramétrico en $y_0 > 0$, es el siguiente:



El subsistema $P(s)$ es un sistema de segundo orden:

- subamortiguado para $0 < y_0 < 4\frac{m}{b}$ ($0 < \zeta < 1$),
- críticamente amortiguado para $y_0 = 4\frac{m}{b}$ ($\zeta = 1$),
- sobreamortiguado para $y_0 > 4\frac{m}{b}$ ($\zeta > 1$).

c) Debe verificarse:

- $y_0 \leq 4\frac{m}{b}$ para que la respuesta natural de $P(s)$ decaiga lo más rápido posible,
- $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ para que la respuesta en frecuencia de $P(s)$ no presente resonancias.

Por lo tanto, debe verificarse $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \zeta \leq 1$, o equivalentemente:

$$2\frac{m}{b} \leq y_0 \leq 4\frac{m}{b}.$$

d) Para maximizar los márgenes de seguridad, se elige el punto medio del intervalo:

$$y_0 = 3\frac{m}{b}.$$

e) Para todo y_0 tal que $0 < y_0 < 4\frac{m}{b}$ (caso subamortiguado), la constante de tiempo de $P(s)$ es:

$$T = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \sqrt{\frac{2m}{gb}} = 1.$$

En particular, para $y_0 = 3\frac{m}{b}$, también.

5) Sintonización del controlador para atender requerimiento en régimen estacionario

Para $g = 10$, $\frac{m}{b} = 5$, $K = 2$, $y_0 = 3\frac{m}{b}$, se tiene $G = \frac{1}{5} = 0.2$, $\omega_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15$, $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$, y por lo tanto:

$$P(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\omega}}(s) = \frac{\frac{4}{15}}{s^2 + s + \frac{4}{3}}.$$

Sea $\tilde{y} = y - y_0$. La función de transferencia $F(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_R}(s)$ del sistema realimentado (operado en el punto de operación $y_0 = 3\frac{m}{b}$), es $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$, donde $L(s) = CHP(s)$ es la transferencia de lazo abierto.

Como el polo de $H(s)$ (en $s=-\frac{10}{T}=-10$) es despreciable frente a los polos de $P(s)$ (con parte real -1), la transferencia $L(s)=CHP(s)=C(s)\left(\frac{50}{s+\frac{10}{T}}\right)\left(\frac{\frac{1}{5}\frac{4}{3}}{s^2+s+\frac{4}{3}}\right)$ se puede aproximar por $\widehat{L}(s)=C(s)\frac{\frac{4}{3}}{s^2+s+\frac{4}{3}}=C(s)\frac{4}{3s^2+3s+4}$, y $F(s)$ por $\hat{F}(s)=\frac{\hat{L}(s)}{1+\hat{L}(s)}$.

Para cumplir con el requerimiento, el sistema realimentado debe ser de tipo 1. Por lo tanto $C(s)$ debe tener un polo en el origen. Esto implica que se debe activar el modo integral ($k_I\neq 0$).

a) Caso controlador integral: $C(s)=\frac{k_I}{s}$.

En este caso $\hat{F}(s)=\frac{4k_I}{3s^3+3s^2+4s+4k_I}$.

Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se concluye que debe verificarse $0<k_I<1$ para que $\hat{F}(s)$ sea estable. El arreglo de Routh-Hurwitz es el siguiente:

s^3	3	4
s^2	3	$4k_I$
s^1	$4(1-k_I)$	
s^0	$4k_I$	

Para que el error en régimen a la rampa unitaria sea menor que $\frac{1}{10}$, se requiere una constante de velocidad $k_v>10$, pero como

$$k_v=\lim_{s\to 0}\hat{L}(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{k_I}{s}\frac{4}{3s^2+3s+4}=k_I,$$

es imposible elegir k_I de forma tal que $\hat{F}(s)$ sea estable y $k_v>10$.

Para estabilizar el sistema realimentado, se debe agregar al menos un cero a la transferencia de lazo abierto.

b) Caso controlador proporcional-integral: $C(s)=k_P+\frac{k_I}{s}=\frac{k_P s+k_I}{s}$.

En este caso $\hat{F}(s)=\frac{4(k_P s+k_I)}{3s^3+3s^2+4(k_P+1)s+4k_I}$.

Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se concluye que debe verificarse $0<k_I<1+k_P$ para que $\hat{F}(s)$ sea estable. El arreglo de Routh-Hurwitz es el siguiente:

s^3	3	$4(k_P+1)$
s^2	3	$4k_I$
s^1	$4(1+k_P-k_I)$	
s^0	$4k_I$	

Para que el error en régimen a la rampa unitaria sea menor que $\frac{1}{10}$, se requiere $k_I>10$.

Entonces, el conjunto de sintonizaciones solución es:

$$S=\{(k_P,k_I)\ :\ 10<k_I<1+k_P\}.$$

Introducción a la Teoría de Control - Examen 14/02/2019
Solución del problema 2

Parte 1

Tomando G, X e I como variables de estado, se obtiene la siguiente representación en variables de estado para el sistema de entradas D y U, y salida G:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} G \\ X \\ I \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} G \\ X \\ I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ U \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -p_1\left(G - G_b\right) - XG + D \\ -p_2 X + p_3\left(I - I_b\right) \\ -p_4 I + U \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G \\ X \\ I \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{1}$$

En equilibrio, en el punto de operación fijado por $D = D_b$, $U = U_b$, se tiene que $G = G_b$, $X = X_b$, $I = I_b$. Entonces,

$$\begin{cases} 0 = \dot{G} = -p_1\left(G - G_b\right) - XG + D = -X_b G_b + D_b, \\ 0 = \dot{X} = -p_2 X + p_3\left(I - I_b\right) = -p_2 X_b, \\ 0 = \dot{I} = -p_4 I + U = -p_4 I_b + U_b. \end{cases}$$

Resolviendo, $D_b = 0$, $X_b = 0$ y $U_b = p_4 I_b$.

Parte 2

Linealizando (1), en torno al punto de operación anterior:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} g \\ x \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & -G_b & 0 \\ 0 & -p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -p_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ x \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ x \\ i \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

donde: $d = D - D_b$, $u = U - U_b$, $g = G - G_b$, $x = X - X_b$, $i = I - I_b$.

Parte 3

a)

Según el diagrama de bloques de la Figura 2:

$$\begin{cases} g(s) = H_C(s)\left[d(s) - H_B(s)i(s)\right], \\ i(s) = H_A(s)u(s). \end{cases} \tag{3}$$

Aplicando transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales en (2):

$$\begin{cases} (s+p_1)\,g(s) = d(s) - G_b x(s), \\ (s+p_2)\,x(s) = p_3 i(s), \\ (s+p_4)\,i(s) = u(s). \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} g(s) = \frac{1}{s+p_1}\left[d(s) - G_b \frac{p_3}{s+p_2} i(s)\right], \\ x(s) = \frac{p_3}{s+p_2} i(s), \\ i(s) = \frac{1}{s+p_4} u(s). \end{cases} \tag{4}$$

Identificando funciones de transferencia entre (3) y (4):

$$H_A(s) = \frac{i}{u}(s) = \frac{1}{s+p_4}, \quad H_B(s) = G_b \frac{x}{i}(s) = \frac{G_b p_3}{s+p_2}, \quad H_C(s) = \frac{g}{d}(s) = \frac{1}{s+p_1}.$$

b)

Del diagrama de bloques de la Figura 2 se desprende que la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$H^{LC}(s) = \frac{g(s)}{d(s)} = \frac{H_C(s)}{1+L(s)}$$

donde: $L(s) = C(s)H_A(s)H_B(s)H_C(s)$ es la transferencia de lazo abierto. Operando:

$$H^{LC}(s) = \frac{g(s)}{d(s)} = \frac{s^2 + s\,(p_2+p_4) + p_2 p_4}{s^3 + s^2\,(p_1+p_2+p_4) + s\,(p_1p_2 + p_1p_4 + p_2p_4) + p_3 G_b C(s) + p_1p_2p_4}$$

Parte 4

Sea $P(s) = H_C(s)H_B(s)H_A(s) = \frac{p_3 G_b}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_4)} = \frac{0{,}00092}{(s+0{,}02)^2(s+0{,}3)}$.

Para lograr el rechazo completo, en régimen estacionario, a perturbaciones en forma de escalón en d, el sistema realimentado debe ser tipo 1 o superior. Es decir, la función de transferencia de lazo abierto, $L(s) = C(s)P(s)$, debe tener al menos un polo en el origen. Como $P(s)$ no tiene polos en el origen, $C(s)$ *debe aportar al menos un polo en el origen.*

Para que el margen de ganancia del sistema realimentado sea infinito, $C(s)$ *debe contar, además, con al menos dos ceros con parte real negativa*, para compensar al menos 180° de los 360° de atraso introducido por los tres polos (con parte real negativa) de $P(s)$ y el polo (en el origen) de $C(s)$.

Por lo anterior, se propone: $C(s) = K\frac{(s+a)(s+b)}{s}$, con $K, a, b > 0$. Luego,

$$L(s) = C(s)P(s) = K\frac{(s+a)\,(s+b)}{s}\frac{0{,}00092}{(s+0{,}02)^2\,(s+0{,}3)}.$$

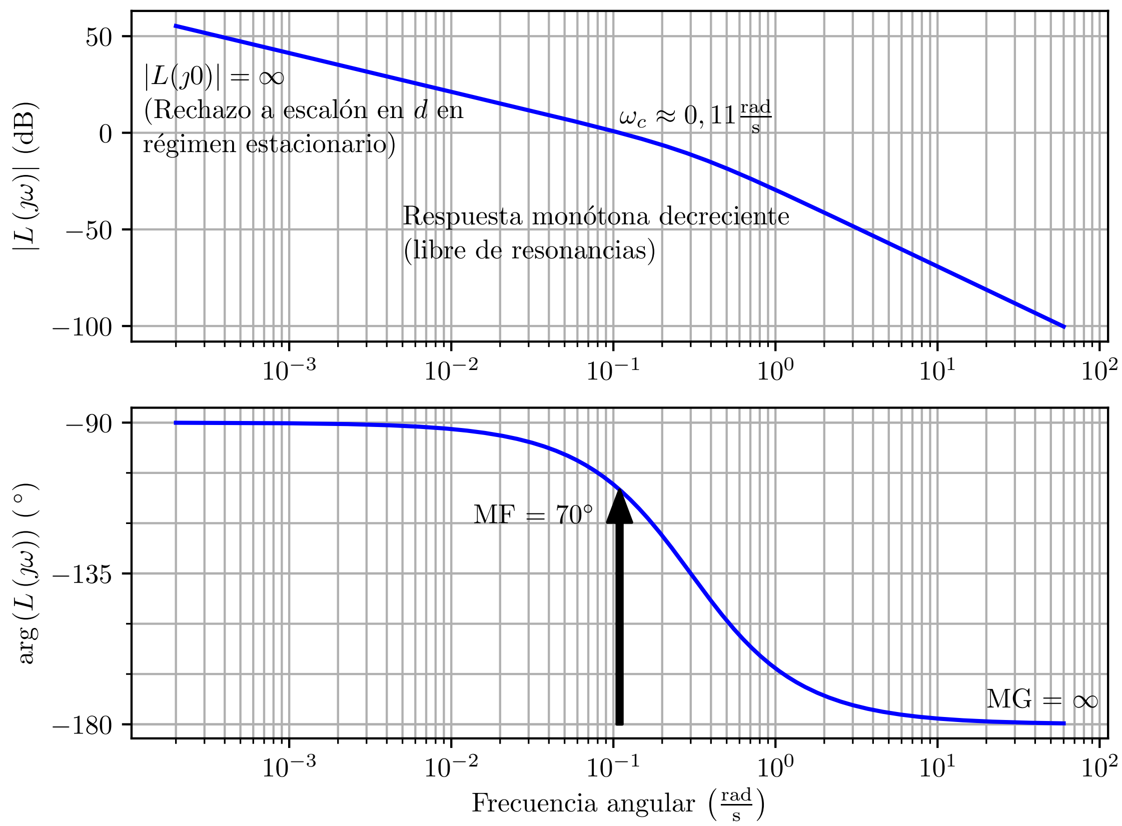
Como los polos de $P(s)$ tienen parte real negativa se pueden cancelar sin comprometer la estabilidad interna, aún cuando la cancelación no sea perfecta. Para simplificar los cálculos, se propone entonces cancelar los dos polos dominantes tomando $a = b = 0{,}02$, de forma tal que:

$$L(s) = C(s)P(s) = K\frac{0{,}00092}{s\,(s+0{,}3)}.$$

Sea ω_c tal que $\arg\left(L\left(\jmath\omega_f\right)\right) = -110°$. Calculando: $\omega_c = \frac{3}{10}\tan\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx 0,11\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Como $\omega_c > 0,1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, alcanza con imponer a ω_c como la frecuencia de cruce de ganancia, eligiendo:

$$K = \left|\frac{0{,}00092}{\jmath\omega_c\,(\jmath\omega_c+0{,}3)}\right|^{-1} \approx 38.$$

En resumen, tomando $C(s) = 38\frac{(s+0{,}02)^2}{s}$ se cumplen todos los requerimientos, como se ilustra en el siguiente diagrama de Bode:



Parte 5

a)

Las funciones de transferencia que intervienen en el modelo del paciente son:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{g}{d}(s) = H_C(s) = \tfrac{1}{s+p_1} = \tfrac{1}{s+0{,}02} = \tfrac{1}{s+\frac{1}{50}} = \tfrac{50}{50s+1},\\
&\tfrac{g}{u}(s) = P(s) = H_C(s)H_B(s)H_A(s) = \tfrac{p_3 G_b}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_4)} = \tfrac{0{,}00092}{(s+0{,}02)^2(s+0{,}3)} = \tfrac{\frac{23}{3}}{(50s+1)^2\left(\frac{10}{3}s+1\right)}.
\end{aligned}$$

Despreciando el polo de alta frecuencia: $P(s) \approx P_a(s) = \frac{\frac{23}{3}}{(50s+1)^2} = \frac{\frac{23}{7500}}{\left(s+\frac{1}{50}\right)^2}$.

b)

Aplicando el teorema de la transmitancia muestreada a $H_C(s) = 50\frac{\frac{1}{50}}{s+\frac{1}{50}}$ y $P_a(s) = \frac{23}{3}\frac{\frac{1}{2500}}{\left(s+\frac{1}{50}\right)^2}$:

$$\begin{aligned}
&\overline{H_C}(z) = 50\tfrac{1-q}{z-q},\\
&\overline{P_a}(z) = \tfrac{23}{3}\tfrac{b_1 z+b_2}{z^2+a_1 z+a_2} = \tfrac{23}{3}\tfrac{b_1 z+b_2}{z^2-2qz+q^2} = \tfrac{23}{3}\tfrac{b_1 z+b_2}{(z-q)^2}.
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&q = \exp\left(-p_1 T\right) = \exp\left(-\tfrac{1}{50}\right) \approx 0{,}9802,\\
&b_1 = 1 - q\left(1+p_1 T\right) = 1 - q\left(1+\tfrac{1}{50}\right) \approx 0{,}0001974,\\
&b_2 = q\left(q + p_1 T - 1\right) \approx 0{,}0001947,\\
&a_1 = -2q \approx -1{,}960,\\
&a_2 = q^2 \approx 0{,}9608.
\end{aligned}$$

Del diagrama de bloques: $g(z) = \overline{H_C}(z)d(z) - K\overline{P_a}(z)g(z)$. Entonces la transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{g}{d}(z) = \frac{\overline{H_C}(z)}{1+K\overline{P_a}(z)} = \frac{50\frac{1-q}{z-q}}{1+\frac{23}{3}K\frac{b_1 z+b_2}{(z-q)^2}} = \frac{50\left(1-q\right)\left(z-q\right)}{z^2-2qz+q^2+\frac{23}{3}K\left(b_1 z+b_2\right)} = \frac{50\left(1-q\right)\left(z-q\right)}{z^2+\left(\frac{23}{3}Kb_1-2q\right)z+\frac{23}{3}Kb_2+q^2}.$$

Parte 6

a)

Para que la propuesta del colega sea viable, el sistema realimentado debe ser estable. El sistema realimentado es estable si y solo si todos los polos de $\frac{g}{d}(z)$ tienen módulo menor que 1. Aplicando el criterio de estabilidad de Jury se obtienen las siguientes condiciones para la estabilidad:

$$\begin{cases}
\frac{23}{3}Kb_2 + q^2 < 1,\\
\frac{23}{3}Kb_2 + q^2 > \frac{23}{3}Kb_1 - 2q - 1,\\
\frac{23}{3}Kb_2 + q^2 > -\frac{23}{3}Kb_1 + 2q - 1.
\end{cases}$$

Operando:

$$\begin{cases} K < \frac{3}{23}\frac{1-q^2}{b_2} \approx 26{,}26 \ , \\ K < \frac{3}{23}\frac{(1+q)^2}{b_1-b_2} \approx 195667{,}8 \ , \\ K > -\frac{3}{23}\frac{(1-q)^2}{b_1+b_2} \approx -0{,}1304 \ . \end{cases}$$

Para que el sistema sea estable y entonces la propuesta sea viable, debe cumplirse:

$$-0{,}1304 \approx -\frac{3}{23}\frac{(1-q)^2}{b_1+b_2} < K < \frac{3}{23}\frac{1-q^2}{b_2} \approx 26{,}26.$$

b)

A diferencia de la solución de la parte 4, la propuesta del colega no logra cumplir con el objetivo primario de control (rechazar completamente las perturbaciones en forma de escalón en d), porque se trata de un sistema realimentado tipo 0.