

Problema 1

Considere el circuito de la figura donde los amplificadores operacionales son ideales y trabajan siempre en la zona lineal. Denotamos $T := RC$, $T' := R'C$, $\omega_n^2 := \frac{1}{LC}$, $k := \frac{R_1}{R}$, con $R_1, R, R', L, C > 0$.

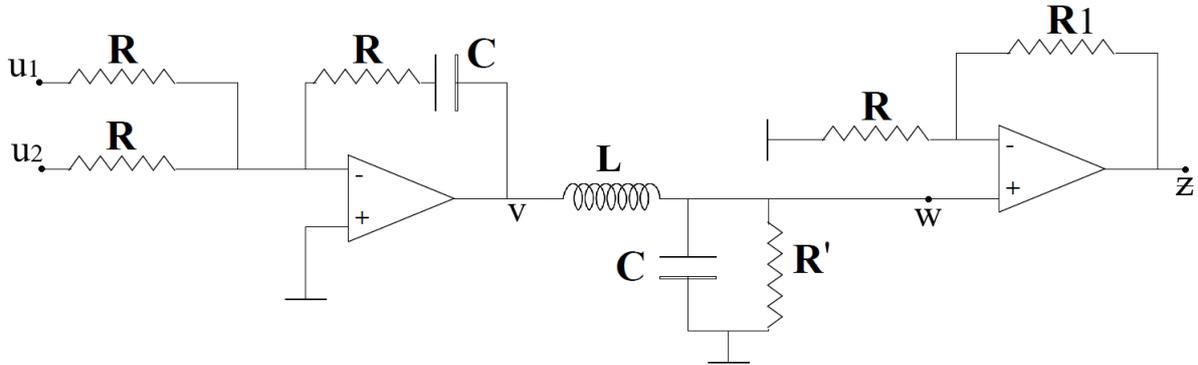


Figura 1: Circuito.

1. Calcule las transferencias $G(s)$, $H(s)$, $L(s)$ respectivamente entre las señales u_i y v , v y w , y w y z , en función únicamente de los parámetros T, T', ω_n, k .
2. El sistema se realimenta conectando eléctricamente el punto z con u_2 . Represente el sistema mediante un diagrama de bloques realimentado donde consten las transferencias $G(s)$, $H(s)$, $L(s)$.
3. Obtenga las relaciones que deben cumplir los parámetros T, T', ω_n, k para que el sistema sea estable.
4. El componente físico asociado a R_1 puede sufrir deterioro durante su vida útil que resulte en un valor de $R_1 > 0$ arbitrario. Determine la relación que deben cumplir ω_n, T, T' para que el sistema mantenga su estabilidad en esa circunstancia.
5. Para el caso $T' = \frac{1}{2}, T = 1, \omega_n = 1$, discuta la estabilidad del sistema en función de $k > 0$ mediante el criterio de Nyquist.
6. Para el caso de la parte 5 obtenga el lugar de las raíces correspondiente a la variación de $k > 0$.

Problema 2

Una reacción química que permite sintetizar una sustancia (producto) a partir de otra (reactivo) se modela por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{k_1 R}{(1 + k_2 R)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{k_1 R}{(1 + k_2 R)^2}, \quad (2)$$

donde R, P son las concentraciones volumétricas del reactivo y del producto en la mezcla que incluye también una sustancia inerte. k_1, k_2 son constantes positivas conocidas. Las ecuaciones (1) y (2) determinan la velocidad de la reacción en función de la concentración del reactivo **en un sistema cerrado en que no se intercambian sustancias con el exterior.**

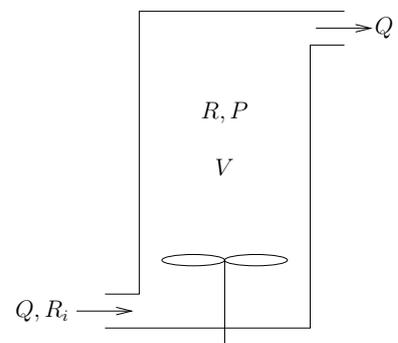


Figura 2: Reactor.

En una planta industrial se utiliza un reactor para sintetizar en forma continua el producto a partir del reactivo. El tanque del reactor tiene un volumen V conocido. El caudal volumétrico de entrada Q es una mezcla de reactivo y sustancia inerte. La concentración de reactivo en este caudal de entrada es R_i . Dentro del reactor se dan las condiciones para que ocurra la reacción química. Las concentraciones de reactivo y producto dentro del reactor, R y P respectivamente, se asumen homogéneas. El reactor permanece lleno y todas las sustancias involucradas se asumen incompresibles, por lo tanto, el caudal de salida del reactor es igual al caudal de entrada. **Como el reactor es un sistema abierto, es necesario tener en cuenta el ingreso/egreso de cada sustancia al reactor al modelar la dinámica de las concentraciones correspondientes.**

1. Halle una representación en variables de estado para el sistema de entrada $[Q \ R_i]^\top$, salida P , y estado $[R \ P]^\top$.
2. Considere el punto de equilibrio correspondiente a $Q = Q_0 > 0$ y $R = R_0, 0 < R_0 < 1$. Determine $P = P_0$ y $R_i = R_{i0}$ correspondientes al punto de equilibrio considerado.
3. Sean $\tilde{q} \triangleq Q - Q_0, \tilde{r}_i \triangleq R_i - R_{i0}, \tilde{r} \triangleq R - R_0$ y $\tilde{p} \triangleq P - P_0$ los apartamientos con respecto al equilibrio. Verifique que la representación en variables de estado hallada en el punto 1 admite la siguiente linealización en torno al punto de equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -(a+c) & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & c \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r}_i \end{bmatrix} \\ \tilde{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

donde $b, c > 0$. Halle a, b y c en función de k_1, k_2, V, Q_0, R_0 y P_0 .

Para las siguientes partes del ejercicio, asuma que $a > 0$.

Para controlar la concentración de producto dentro del reactor, se implementa un sistema de control representado por el diagrama de bloques de la Figura 3, donde $H(s)$ es la matriz de transferencia de (3), y $T_i > 0$ y $K \in \mathbb{R}$ son los parámetros de un controlador proporcional-integral. Una señal de referencia \tilde{p}_{ref} establece la concentración de producto deseada. La señal de error es $\tilde{e} \triangleq \tilde{p}_{ref} - \tilde{p}$.

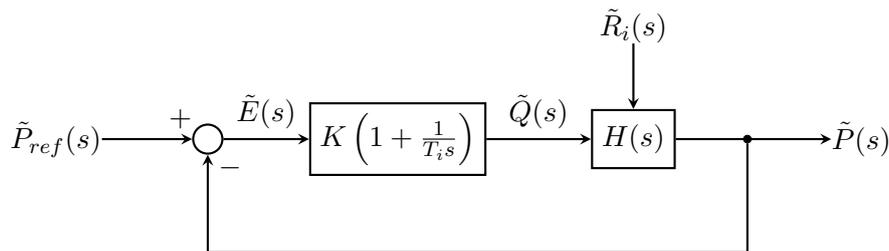


Figura 3: Diagrama de bloques del sistema de control.

4. Aplique el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar bajo qué condiciones el sistema realimentado con entrada \tilde{p}_{ref} y salida \tilde{p} es estable.
5. Suponiendo que las condiciones halladas en 4 se verifican, y que

$$\tilde{p}_{ref}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ -P_0/20 & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

$$\tilde{r}_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ -R_{i0}/10 & \text{si } t \geq 0; \end{cases}$$

halle $\tilde{e}(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Justifique.

Solución del problema 1

Parte 1

$$v(s) = G(s)[u_1(s) + u_2(s)]; G(s) = -\frac{1 + Ts}{Ts}$$

$$w(s) = H(s)v(s); H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \frac{s}{T'} + \omega_n^2};$$

$$z(s) = L(s)w(s), L(s) = 1 + \frac{R_1}{R} = 1 + k.$$

Parte 2

Realimentación unitaria standard con ganancia de lazo abierto

$$H_{ol}(s) = (1 + k) \frac{1 + Ts}{Ts} \frac{\omega_n^2}{s^2 + \frac{s}{T'} + \omega_n^2}.$$

Parte 3

El polinomio característico resulta

$$d(s) = Ts(s^2 + \frac{s}{T'} + \omega_n^2) + (1 + k)(1 + Ts)\omega_n^2 =$$

$$Ts^3 + \frac{T}{T'}s^2 + T\omega_n^2s + (1 + k)T\omega_n^2s + (1 + k)\omega_n^2 =$$

$$Ts^3 + \frac{T}{T'}s^2 + T\omega_n^2[2 + k]s + (1 + k)\omega_n^2.$$

Si aplicamos Routh-Hurwitz se obtiene el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} T \\ \frac{T}{T'} \\ \omega_n^2[(2T - T') + k(T - T')] \\ \omega_n^2(1 + k) \end{bmatrix}.$$

La estabilidad requiere que no haya cambios de signo en ese vector, por lo que es necesario y suficiente que

$$(2T - T') + k(T - T') > 0$$

que es la condición pedida.

Parte 4

Al tomar R_1 cualquier valor positivo, k puede tomar cualquier valor positivo. Para que la desigualdad obtenida en la parte 3 se cumpla para todo k positivo, es necesario y suficiente que

$$2T - T' > 0; (T - T') > 0,$$

que se cumplen si y solo si

$$T > T'.$$

Parte 5

Para los valores de T, T', ω_n dados, tenemos

$$H_{ol}(s) = (1+k) \frac{1+s}{s} \frac{1}{s^2+2s+1} = (1+k) \frac{1}{s(s+1)}.$$

Aplicando el criterio de Nyquist obtenemos el diagrama de la figura 4 que resulta que el sistema es estable para todo $k+1 > 0$.

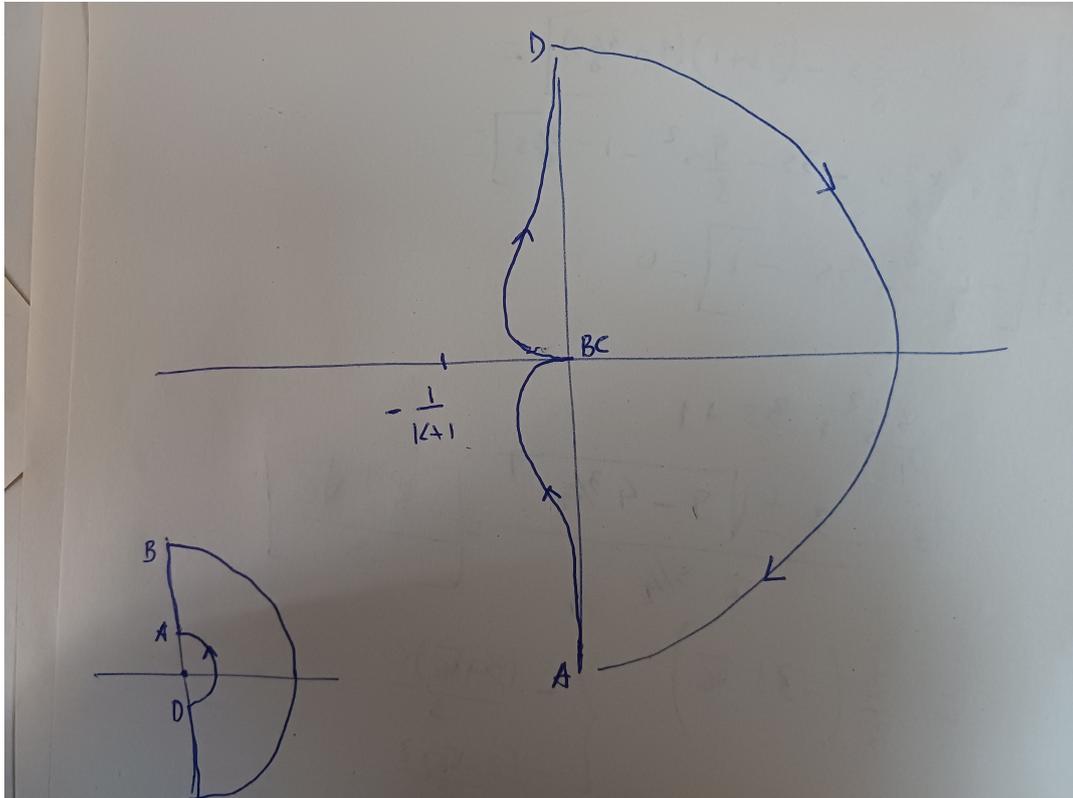


Figura 4: Diagrama de Nyquist.

Parte 6

Dado que

$$H_{ol}(s) = (1+k) \frac{1}{s(s+1)},$$

podemos buscar las raíces de

$$1 + H_{ol}(s) = 1 + (1+k) \frac{1}{s(s+1)} = 0,$$

cuyo polinomio característico es

$$d(s) = s(s+1) + 1 + k = s^2 + s + 1 + k = 0$$

o, en forma equivalente

$$1 + k \frac{1}{s^2 + s + 1} = 0$$

El lugar de las raíces correspondiente va en la figura 5. Parte ($k = 0$) de los polos de la función $\frac{1}{s^2+s+1}$ que son los complejos

$$s = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

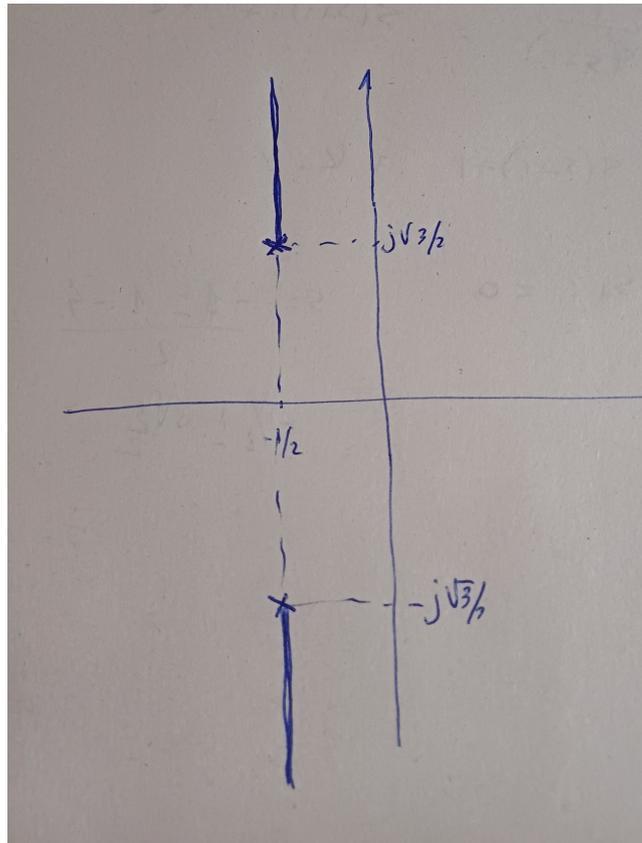


Figura 5: Lugar de las raíces.

Solución del problema 2

Parte 1

Como las sustancias se asumen incompresibles, se pueden aplicar balances volumétricos a cada sustancia en un volumen de control que coincide con el volumen ocupado por el tanque del reactor.

Durante un intervalo de tiempo Δt , ingresa un volumen $R_i Q \Delta t$ de reactivo al tanque, egresa un volumen $RQ \Delta t$ de reactivo del tanque, y un volumen $\frac{k_1 R}{(1+k_2 R)^2} V \Delta t$ de reactivo en el interior del tanque se convierte en producto:

$$R(t + \Delta t) V - R(t) V = R_i Q \Delta t - RQ \Delta t - \frac{k_1 R}{(1 + k_2 R)^2} V \Delta t.$$

Análogamente, durante un intervalo de tiempo Δt , egresa un volumen $PQ \Delta t$ de producto del tanque, y un volumen $\frac{k_1 R}{(1+k_2 R)^2} V \Delta t$ de reactivo en el interior del tanque se convierte en producto:

$$P(t + \Delta t) V - P(t) V = -PQ \Delta t + \frac{k_1 R}{(1 + k_2 R)^2} V \Delta t.$$

Dividiendo entre Δt y tomando límite para $\Delta t \rightarrow 0$ en las ecuaciones anteriores:

$$V \frac{dR}{dt} = R_i Q - RQ - \frac{k_1 R}{(1 + k_2 R)^2} V,$$

$$V \frac{dP}{dt} = -PQ + \frac{k_1 R}{(1 + k_2 R)^2} V.$$

A partir de las dos últimas ecuaciones se obtiene la siguiente representación en variables de

estado para el sistema de entrada $[Q \ R_i]^T$, salida P , y estado $[R \ P]^T$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} R \\ P \end{bmatrix} = f \left(\begin{bmatrix} R \\ P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q \\ R_i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{Q}{V} (R_i - R) - \frac{k_1 R}{(1+k_2 R)^2} \\ \frac{k_1 R}{(1+k_2 R)^2} - \frac{Q}{V} P \end{bmatrix}, \\ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Parte 2

En equilibrio, para $Q = Q_0$, $R_i = R_{i0}$, se tiene que $R = R_0$ y $P = P_0$ verifican:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_0}{V} (R_{i0} - R_0) - \frac{k_1 R_0}{(1+k_2 R_0)^2} \\ \frac{k_1 R_0}{(1+k_2 R_0)^2} - \frac{Q_0}{V} P_0 \end{bmatrix}.$$

Despejando,

$$P_0 = \frac{V k_1 R_0}{Q_0 (1 + k_2 R_0)^2},$$

$$R_{i0} = R_0 + \frac{V k_1 R_0}{Q_0 (1 + k_2 R_0)^2}.$$

Parte 3

Linealizando la representación en variables de estado hallada en la parte 1, en torno al punto de equilibrio caracterizado en la parte 2:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \frac{k_2^2 R_0^2 - 1}{(1+k_2 R_0)^4} - \frac{Q_0}{V} & 0 \\ -k_1 \frac{k_2^2 R_0^2 - 1}{(1+k_2 R_0)^4} & -\frac{Q_0}{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_{i0} - R_0}{V} & \frac{Q_0}{V} \\ -\frac{P_0}{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r}_i \end{bmatrix}, \\ \tilde{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}, \end{cases}$$

donde $\tilde{q} = Q - Q_0$, $\tilde{r}_i = R_i - R_{i0}$, $\tilde{r} = R - R_0$ y $\tilde{p} = P - P_0$.

Alcanza con identificar

$$a = k_1 \frac{k_2^2 R_0^2 - 1}{(1 + k_2 R_0)^4} - \frac{Q_0}{V},$$

$$b = \frac{R_{i0} - R_0}{V},$$

$$c = \frac{Q_0}{V} > 0,$$

y observar que, de la parte 2,

$$0 < \frac{P_0}{V} = \frac{k_1 R_0}{Q_0 (1 + k_2 R_0)^2} = \frac{R_{i0} - R_0}{V} = b,$$

para concluir que el modelo linealizado es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -(a+c) & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & c \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{r}_i \end{bmatrix}, \\ \tilde{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}, \end{cases}$$

donde $b, c > 0$.

Parte 4

A partir de esta parte se asume que $a > 0$, tal como se indica en la propuesta del problema. Además $b, c > 0$, como ya se verificó en la parte 2.

Sean $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -(a+c) & -c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & c \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ y $C = [0 \ 1]$. La matriz de transferencia es:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{b}{s-a} & -\frac{c(a+c)}{(s-a)(s+c)} \end{bmatrix}.$$

La matriz de transferencia relaciona la entrada $[\tilde{Q}(s) \ \tilde{R}_i(s)]^T$ con la salida $\tilde{P}(s)$:

$$\tilde{P}(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b}{s-a} & -\frac{c(a+c)}{(s-a)(s+c)} \end{bmatrix}}_{H(s)} \begin{bmatrix} \tilde{Q}(s) \\ \tilde{R}_i(s) \end{bmatrix}.$$

Según el diagrama de bloques dado, el control se implementa actuando sobre la entrada \tilde{q} . Se pide estudiar la estabilidad del sistema realimentado de entrada \tilde{p}_{ref} y salida \tilde{p} , aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist. La función de transferencia de este sistema es:

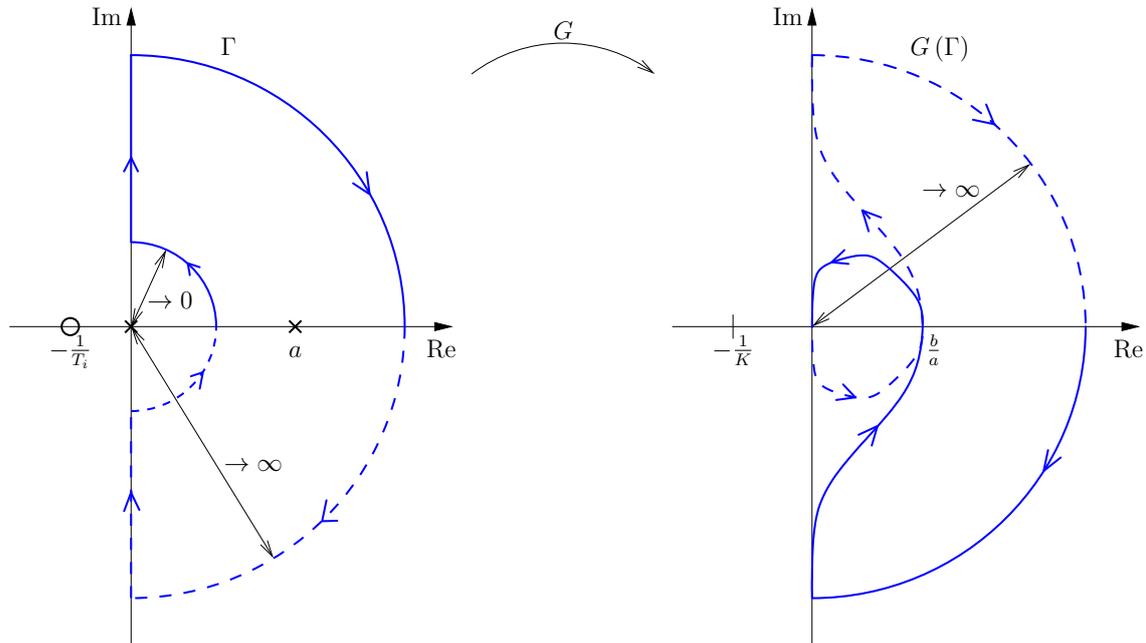
$$H_{\tilde{p}, \tilde{p}_{ref}}(s) \triangleq \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

donde

$$G(s) \triangleq -\frac{b}{s-a} \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = -\frac{b}{s-a} \frac{T_i s + 1}{T_i s} = -\frac{b}{s-a} \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}.$$

Los polos de $H_{\tilde{p}, \tilde{p}_{ref}}(s)$ son los ceros de $1 + KG(s)$.

A continuación se ilustra el diagrama de Nyquist de $G(s)$.



Como

$$G(j\omega) = -\frac{b}{j\omega - a} \frac{j\omega + \frac{1}{T_i}}{j\omega} = b \frac{\left(a + \frac{1}{T_i}\right)\omega + j\left(\omega^2 - \frac{a}{T_i}\right)}{(\omega^2 + a^2)\omega},$$

para $\omega = \sqrt{\frac{a}{T_i}}$, la traza de Nyquist intersecta el eje real positivo, en el punto $G\left(j\sqrt{\frac{a}{T_i}}\right) = \frac{b}{a}$.

El sistema realimentado, de entrada \tilde{p}_{ref} y salida \tilde{p} , es estable si y solo si la traza de Nyquist de $G(s)$ rodea una vez en sentido antihorario el punto $-1/K$. Esto ocurre si y solo si

$$K < -\frac{a}{b},$$

donde $a, b > 0$.

Parte 5

Del diagrama de bloques dado y la matriz de transferencia antes hallada:

$$\tilde{E}(s) = \tilde{P}_{ref} - \underbrace{\left(-\frac{b}{s-a} \underbrace{K \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \tilde{E}(s)}_{\tilde{Q}(s)} - \frac{c(a+c)}{(s-a)(s+c)} \tilde{R}_i(s) \right)}_{\tilde{P}(s)}.$$

Despejando $\tilde{E}(s)$:

$$\tilde{E}(s) = \frac{s(s-a)}{s(s-a) - dK \left(s + \frac{1}{T_i} \right)} \tilde{P}_{ref}(s) + \frac{sc(a+c)}{(s+c) \left(s(s-a) - dK \left(s + \frac{1}{T_i} \right) \right)} \tilde{R}_i(s),$$

donde, para esta parte del problema, $\tilde{P}_{ref}(s) = -\frac{P_0}{20} \frac{1}{s}$ y $\tilde{R}_{i0}(s) = -\frac{R_{i0}}{10} \frac{1}{s}$.

Aplicando el teorema del valor final:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s(s-a)}{s(s-a) - dK \left(s + \frac{1}{T_i} \right)} \left(-\frac{P_0}{20} \frac{1}{s} \right) + \frac{sc(a+c)}{(s+c) \left(s(s-a) - dK \left(s + \frac{1}{T_i} \right) \right)} \left(-\frac{R_{i0}}{10} \frac{1}{s} \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

El teorema del valor final es aplicable porque los polos de $E(s)$ tienen parte real negativa. Los polos de $E(s)$ son: $-c$, con $c > 0$, y las raíces de $s(s-a) - dK \left(s + \frac{1}{T_i} \right)$ que son los ceros de $1 + KG(s)$. Como se supone que se cumple la condición $K < -\frac{a}{b}$, los ceros de $1 + KG(s)$ tienen parte real negativa según el criterio de estabilidad aplicado en la parte 4.