Problema 2 (solución)

Parte 1

Son dadas las siguientes dos ecuaciones:

$$m_2 g\cos\varphi + T = m_2\left(\ddot{x}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\right), \tag{1}$$
$$g\sin\varphi = l\ddot{\varphi} - \ddot{x}\cos\varphi. \tag{2}$$

Aplicando la segunda ley de Newton al carrito y proyectando según $\hat{\imath}$:

$$f - T\sin\varphi = m_1\ddot{x}. \tag{3}$$

Despejando T de (1), sustituyendo en (3) y despejando $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{f + m_2\sin\varphi\left(g\cos\varphi + l\dot{\varphi}^2\right)}{m_1 + m_2\sin^2\varphi}. \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (2) y despejando $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{f\cos\varphi + m_2\sin\varphi\cos\varphi\left(g\cos\varphi + l\dot{\varphi}^2\right)}{\left(m_1 + m_2\sin^2\varphi\right)l}. \tag{5}$$

De (4) y (5) se obtiene la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{f + m_2\sin\varphi\left(g\cos\varphi + l\dot{\varphi}^2\right)}{m_1 + m_2\sin^2\varphi} \\ \dot{\varphi} \\ \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{f\cos\varphi + m_2\sin\varphi\cos\varphi\left(g\cos\varphi + l\dot{\varphi}^2\right)}{\left(m_1 + m_2\sin^2\varphi\right)l} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{6}$$

Parte 2

Para $f = 0$, constante, claramente $\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ es solución de (6), para todo $x_0 \in \mathbb{R}$; en particular para $x_0 = 0$. Linealizando en torno a este punto de equilibrio:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{m_1}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{m_1 l} \end{bmatrix}\left[f\right], \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{7}$$

Tomando transformada de Laplace, con condiciones iniciales nulas, en la cuarta fila de (7):

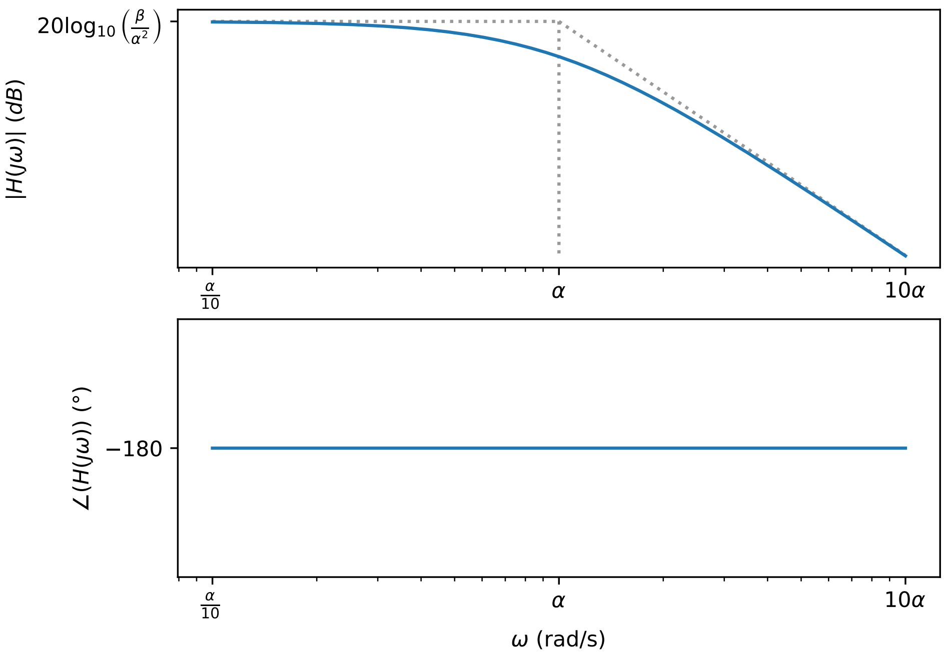
$$s^2\Phi(s) = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l}\Phi(s) + \frac{1}{lm_1}F(s),$$

de donde se obtiene:

$$H(s) \triangleq \frac{\Phi(s)}{F(s)} = \frac{\beta}{s^2 - \alpha^2}, \quad \text{donde} \quad \alpha = \sqrt{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{m_1 l}.$$

Parte 3

El diagrama de Bode de $H(s)$ es el siguiente:



Parte 4

Del diagrama del bloques dado, se tiene que:

$$\Phi(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)C(s)}D(s) = \frac{\frac{\beta}{s^2-\alpha^2}}{1 + \frac{\beta}{s^2-\alpha^2}C(s)}D(s), \tag{8}$$

por lo que

$$H_d(s) \triangleq \frac{\Phi(s)}{D(s)} = \frac{\frac{\beta}{s^2-\alpha^2}}{1 + \frac{\beta}{s^2-\alpha^2}C(s)} = \frac{\beta}{s^2 - \alpha^2 + \beta C(s)}.$$

Parte 5

Para que $\varphi(t) \to 0$, para $t \to \infty$, ante una señal $d(t)$ en forma de escalón, $C(s)$ debe tener al menos un polo en $s = 0$ y los polos de $H_d(s)$ (*i. e.*, los ceros de $1 + H(s)C(s)$) deben tener parte real negativa. En esas condiciones, se puede aplicar el teorema del valor final a (8) para establecer que

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{\beta}{s^2-\alpha^2}}{1 + \frac{\beta}{s^2-\alpha^2}C(s)}\frac{1}{s} = 0,$$

donde se tomó $D(s) = \frac{1}{s}$, correspondiente a una señal $d(t)$ en forma de escalón unitario.

Controlador proporcional

Ya se determinó que es necesario que $C(s)$ tenga al menos un polo en $s = 0$. Como $C(s) = K$, no tiene polos en $s = 0$, se descarta la posiblidad de operar al controlador en el modo proporcional.

Controlador proporcional-integral

Para $C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$, donde $K, T_i > 0$, se tiene que

$$H_d(s) = \frac{\beta s}{s^3 + (\beta K - \alpha^2)\, s + \frac{\beta K}{T_i}}.$$

Como el denominador de la función de transferencia anterior es incompleto, el sistema realimentado resulta inestable. Por esto se descarta la posibilidad de operar el controlador en el modo proporcional-integral.

Controlador proporcional-integral-derivativo

Para $C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$ donde $K, T_i, T_d > 0$, se tiene que

$$H_d(s) = \frac{\beta s}{s^3 + \beta K T_d s^2 + (\beta K - \alpha^2)\, s + \frac{\beta K}{T_i}}.$$

El arreglo de Routh-Hurwitz para $s^3 + \beta K T_d s^2 + \left(\beta K - \alpha^2\right) s + \frac{\beta K}{T_i}$ es el siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & \beta K - \alpha^2 \\ s^2 & \beta K T_d & \frac{\beta K}{T_i} \\ s^1 & \beta K - \alpha^2 - \frac{1}{T_i T_d} & \\ s^0 & \frac{\beta K}{T_i} & \end{array}$$

A partir del arreglo anterior, según el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, se infiere que $H_d(s)$ es estable si y solo si

$$K > \frac{1}{\beta}\left(\alpha^2 + \frac{1}{T_i T_d}\right). \tag{9}$$

Entonces, el único modo de operación viable es el proporcional-integral-derivativo, ya que es el único que permite lograr la estabilidad del sistema realimentado. El conjunto de todas las sintonizaciones que cumplen con el requerimiento es:

$$\left\{(K, T_i, T_d) \in \mathbb{R}^3 \ : K > \frac{1}{\beta}\left(\alpha^2 + \frac{1}{T_i T_d}\right),\ T_i > 0,\ T_d > 0\right\}.$$

Parte 6

Siguiendo la sugerencia se impone la relación

$$T_d = \frac{T_i}{4}, \tag{10}$$

de forma tal que los dos ceros del $C(s)$ sean reales e iguales:

$$C(s) = K\frac{T_i}{4s}\left(s + \frac{2}{T_i}\right)^2.$$

Se requiere que la frecuencia angular de ganancia unitaria de lazo abierto sea igual a 4α. Para simplificar los cálculos que siguen, se elige de manera tentativa

$$T_i = \frac{2}{\alpha}, \tag{11}$$

de forma tal de cancelar un polo de $H(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)(s-\alpha)}$ con un cero de $C(s)$. Entonces

$$L(s) = \frac{K\beta}{2\alpha}\frac{s+\alpha}{s\,(s-\alpha)}, \quad |L(\jmath\omega)| = \frac{\frac{K\beta}{2\alpha}}{\omega} \quad \text{y} \quad \angle L(\jmath\omega) = -\frac{3\pi}{2} + 2\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Para que la frecuencia de cruce de ganancia de $L(s)$ sea igual a 4α, debe cumplirse $\frac{K\beta}{2\alpha} = 4\alpha$, por lo que hay que tomar:

$$K = 8\frac{\alpha^2}{\beta}. \tag{12}$$

El margen de fase resultante para la elección anterior es:

$$\text{MF} = \pi + \angle L\,(\jmath 4\alpha) = -\frac{\pi}{2} + 2\arctan(4) \approx 1{,}08\,\text{rad} \approx 61{,}9^\circ.$$

Nótese que, para la elección de T_i y T_d establecida por (11) y (10), la condición de estabilidad (9) toma la forma

$$K > 2\frac{\alpha^2}{\beta},$$

que es verificada por la elección (12) de la ganancia K.

Se concluye entonces que para la sintonización

$$K = 8\frac{\alpha^2}{\beta}, \quad T_i = \frac{2}{\alpha}, \quad T_d = \frac{1}{2\alpha},$$

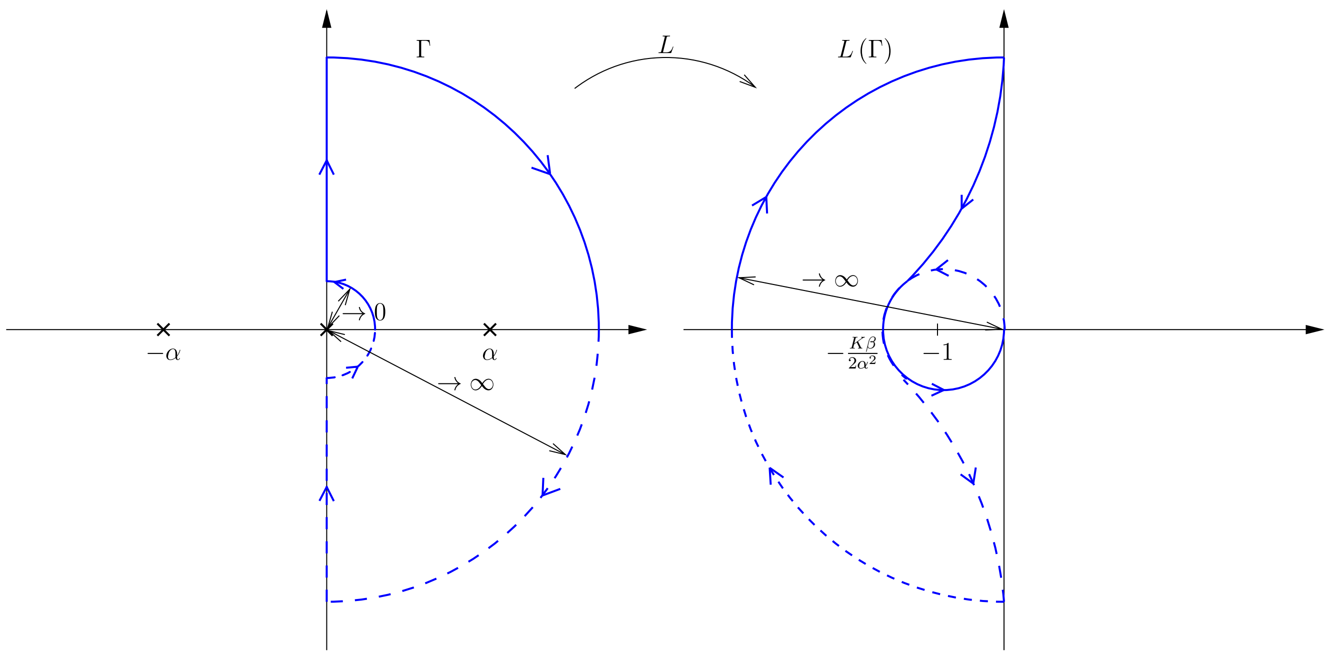
se cumplen todos los requerimientos.

Parte 7

Para la elección de $C(s)$ determinada en la parte anterior,

$$L(s) = \frac{K\beta}{2\alpha}\frac{s+\alpha}{s\,(s-\alpha)}, \quad \text{donde} \quad K, \alpha, \beta > 0.$$

Para aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist, se mapea una curva cerrada Γ, orientada en sentido horario, que tiende a encerrar todo el semiplano derecho sin encerrar al polo en $s = 0$, a través de L:



$$L(\jmath\omega) = \frac{K\beta}{2\alpha}\frac{\jmath\omega+\alpha}{\jmath\omega\left(\jmath\omega-\alpha\right)} = \frac{\frac{K\beta}{2\alpha}}{\omega}\left(\frac{-2\alpha\omega+\jmath\left(\alpha^2-\omega^2\right)}{\omega^2+\alpha^2}\right),$$

Para $\omega=\alpha$, la parte imaginaria de $L\left(\jmath\omega\right)$ es nula y la parte real vale:

$$L\left(\jmath\alpha\right) = -\frac{K\beta}{2\alpha^2}.$$

Sea N el número de rodeos, en sentido horario, de la traza de Nyquist, $L\left(\Gamma\right)$, alrededor de -1. Según el criterio de estabilidad de Nyquist,

$$N = Z - P,$$

donde P es la cantidad de polos de $L(s)$ encerrados por Γ y Z es la cantidad de polos de $1+L(s)$ encerrados por Γ (*i. e.*, la cantidad de polos de $H_d(s)$ encerrados por Γ). Como $P=1$, se tiene que

$$N = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{K\beta}{2\alpha^2} > 1, \\ 1 & \text{si } \frac{K\beta}{2\alpha^2} < 1. \end{cases}$$

Entonces, $Z=0$ si y solo si $\frac{K\beta}{2\alpha^2}>1$, es decir si $K>2\frac{\alpha^2}{\beta}$.

Se concluye entonces que $H_d(s)$ es estable si y solo si $K>2\frac{\alpha^2}{\beta}$.