Carrera:	**INGENIERÍA ELÉCTRICA**	**Instituto de Ingeniería Eléctrica**
Materia:	**CONTROL**	
Asignaturas:	**SISTEMAS Y CONTROL**	**Departamento de Sistemas y Control**
Plan:	**97**	
Fecha:	**27/07/2024**	**PERIODO: JULIO 2024**

Problema 1

La Figura 1 ilustra un data center sostenible, diseñado para ser enfriado por el agua de un río que circula a temperatura T_{rio}. Con este propósito, se realiza una obra en la que se desvía parte del caudal de un río para hacerlo circular dentro de una pileta de enfriamiento en la que se sumerge un contenedor que aloja los servidores.

Se considera que los flujos de agua entrante y saliente de la pileta de enfriamiento son iguales, y se les denomina q_{AGUA}. La temperatura del flujo de agua entrante a la pileta de enfriamiento es denominada T_{IN} y la temperatura del flujo de salida es T_{OUT}. La pileta de enfriamiento tiene un volumen de agua constante denominado V_P y la temperatura en su interior es igual a T_{OUT}. La capacidad calorífica del agua es denominada c.

Por su parte, el data center intercambia una potencia calorífica W_D con la pileta de agua.

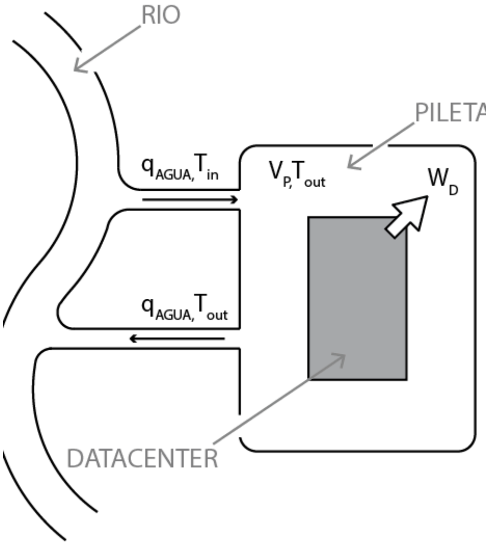


Figura 1. Diagrama de la infraestructura de enfriamiento. A la derecha, un data center real que funciona bajo este concepto

Se pide

1. Hallar las ecuaciones dinámicas del sistema considerando $[t_{rio}, q_{agua}, w_d]$ como entrada y t_{out} como salida

Debido a las altas temperaturas del agua del río, el sistema de enfriamiento pierde efectividad, por lo que se decide instalar un sistema de intercambio de calor adicional que extrae energía térmica del cauce de agua entrante antes de que ingrese a la pileta, tal como se muestra en la Figura 2a.

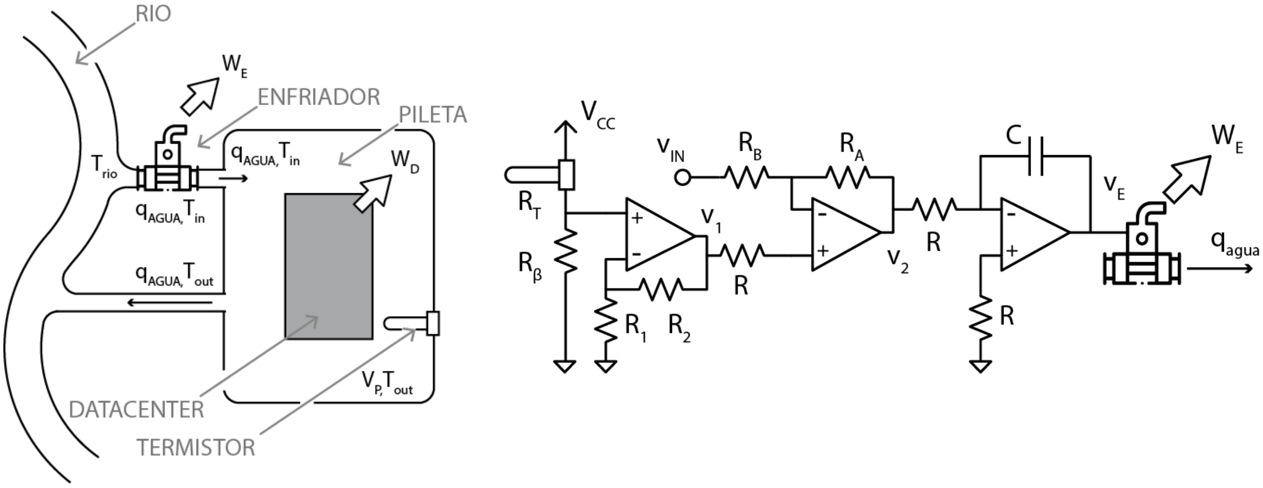


Figura 2a. Sistema de enfriamiento con el intercambiador de calor instalado. Figura 2b, sistema de control del intercambiador de calor.

El sistema de enfriamiento extrae calor del sistema de acuerdo a su voltaje de alimentación en continua V_E, según la ecuación $W_E = \alpha . V_E$, donde α es una constante en unidades adecuadas. Con el objetivo de medir la temperatura en el interior de la pileta de enfriamiento, se instala un termistor cuya ecuación característica es $R_T = R_0(1 - \gamma . T_{OUT})$.

Por otra parte, se diseña un circuito de control encargado de controlar el sistema de enfriamiento en base a la temperatura del agua en la pileta, ilustrado en la Figura 2b

2. Hallar las nuevas ecuaciones dinámicas del sistema, considerando el sistema de enfriamiento agregado.
3. Linealizar el sistema entorno al punto $[T_{RIO}^0, q_{AGUA}^0, W_D^0, V_{IN}^0]$, considerando $[t_{rio}, q_{agua}, w_d, v_{in}]$ como entrada y t_{out} como salida
4. Determinar un modelo en variables de estado para el sistema. SUGERENCIA. A partir de esta sección, opere paramétricamente con los componentes de la matriz de transición de estados y la matriz de entrada
5. Realizar un diagrama de bloques del sistema
6. Dibuje el lugar geométrico de las raíces resultante al variar la constante α
7. Determine el valor de α que determina un amortiguamiento crítico para los polos dominantes
8. Debido a una sequía, el caudal del rio se reduce a $\frac{q_{AGUA}^0}{2}$. Determine como afecta este fenómeno a la temperatura del caudal de salida T_{OUT}

Solución Problema 1.

1.

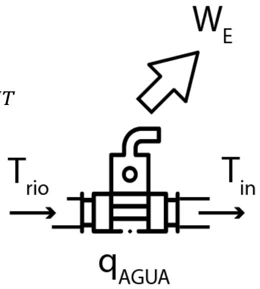
Realizando un balance energético en la caldera

$$T_{IN} = T_{RIO}$$

$$V_P.c.\dot{T}_{OUT} = W_D + q_{AGUA}.c.T_{RIO} - q_{AGUA}.c.T_{OUT}$$

2.

En el intercambiador de calor:



$$q_{AGUA}.c.T_{RIO} = W_E + q_{AGUA}.c.T_{IN}$$

$$V_P.c.\dot{T}_{OUT} = W_D - W_E + q_{AGUA}.c.T_{RIO} - q_{AGUA}.c.T_{OUT}$$

Ecuaciones del circuito de control

$$e = \frac{R_\beta}{R_T + R_\beta}.V_{CC}$$

$$V_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e = \frac{(R_1 + R_2).R_\beta}{(R_T + R_\beta).R_1} V_{CC}$$

$$V_2 = V_1\left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right) - \frac{R_A}{R_B} V_{in}$$

$$\dot{V}_E = -\frac{1}{RC} V_2$$

Agrupando las ecuaciones, desde abajo hacia arriba

$$\dot{V}_E = -\frac{1}{RC}\left(V_1\left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right) - \frac{R_A}{R_B} V_{in}\right) = \frac{1}{RC}\left(\frac{R_A}{R_B} V_{in} - V_1\left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right)\right)$$

$$\dot{V}_E = \frac{1}{RC}\left[\frac{R_A}{R_B} V_{in} - \left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta}{R_T + R_\beta}.V_{CC}\right]$$

Agregando la ecuación característica del termistor

$$\dot{V}_E = \frac{1}{RC}\left[\frac{R_A}{R_B} V_{in} - \left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta}{R_0(1 - \gamma.T_{OUT}) + R_\beta}.V_{CC}\right]$$

3.

En el punto de equilibrio se cumple que $\dot{V}_E = 0, \dot{T}_{OUT} = 0$

$$\frac{1}{RC}\left[\frac{R_A}{R_B} V_{IN}^0 - \left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta}{R_0(1 - \gamma.T_{OUT}^0) + R_\beta}.V_{CC}\right] = 0$$

$$\frac{R_A}{R_B}V_{IN}^0 = \left(1+\frac{R_A}{R_B}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta}{R_0(1-\gamma.T_{OUT}^0)+R_\beta}.V_{CC}$$

$$R_A V_{IN}^0 = (R_B+R_A)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta}{R_0(1-\gamma.T_{OUT}^0)+R_\beta}.V_{CC}$$

$$R_0\left(1-\gamma.T_{OUT}^0\right)+R_\beta = \left(\frac{R_B}{R_A}+1\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)R_\beta\frac{V_{CC}}{V_{IN}^0}$$

$$T_{OUT}^0 = \frac{R_\beta}{\gamma}\left[1-\left(\frac{R_B}{R_A}+1\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{V_{CC}}{V_{IN}^0}\right]-\frac{R_0}{\alpha}$$

Una vez determinado completamente el punto de equilibrio, procedemos a determinar la representación lineal del sistema.

$$\dot{T_{OUT}} = \frac{W_D}{V_P.c}-\frac{W_E}{V_P.c}+\frac{q_{AGUA}}{V_P}.T_{RIO}-\frac{q_{AGUA}}{V_P}.T_{OUT}$$

$$\dot{t_{out}} = \frac{1}{V_P.c}w_d-\frac{\alpha}{V_P.c}v_e+\frac{\left(T_{RIO}^0-T_{OUT}^0\right)}{V_P}q_{agua}+\frac{q_{AGUA}^0}{V_P}t_{rio}-\frac{q_{AGUA}^0}{V_P}t_{out}$$

$$\dot{V_E} = \frac{1}{RC}\left[\frac{R_A}{R_B}V_{in}-\left(1+\frac{R_A}{R_B}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta}{R_0(1-\gamma.T_{OUT})+R_\beta}.V_{CC}\right]$$

$$\dot{v_e} = \frac{R_A}{RCR_B}v_{in}-\left.\frac{\delta\dot{V_E}}{\delta T_{OUT}}\right|_{P_{op}}$$

$$\dot{v_e} = \frac{R_A}{RCR_B}v_{in}-\left(1+\frac{R_A}{R_B}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta.R_0.\gamma.V_{CC}}{\left(R_0\left(1-\gamma.T_{OUT_0}\right)+R_\beta\right)^2}t_{out}$$

4.

$$\begin{bmatrix}\dot{t_{out}}\\ \dot{v_e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & \alpha.a_{12}\\ a_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{out}\\ v_e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & b_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{rio}\\ q_{agua}\\ w_d\\ v_{in}\end{bmatrix}$$

Con:

$$a_{11} = -\frac{q_{AGUA}^0}{V_P}$$

$$a_{12} = \frac{\alpha}{V_P.c}$$

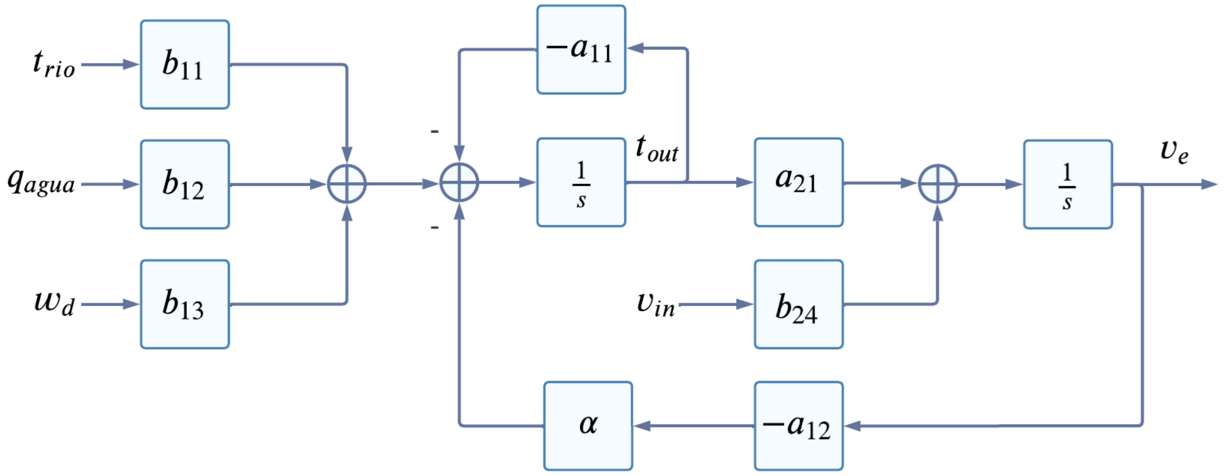
$$a_{21} = -\left(1+\frac{R_A}{R_B}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_\beta.R_0.\gamma.V_{CC}}{\left(R_0\left(1-\gamma.T_{OUT_0}\right)+R_\beta\right)^2}$$

$$b_{11} = \frac{q_{AGUA}^0}{V_P}$$

$$b_{12} = \frac{\left(T_{RIO}^0-T_{OUT}^0\right)}{V_P}$$

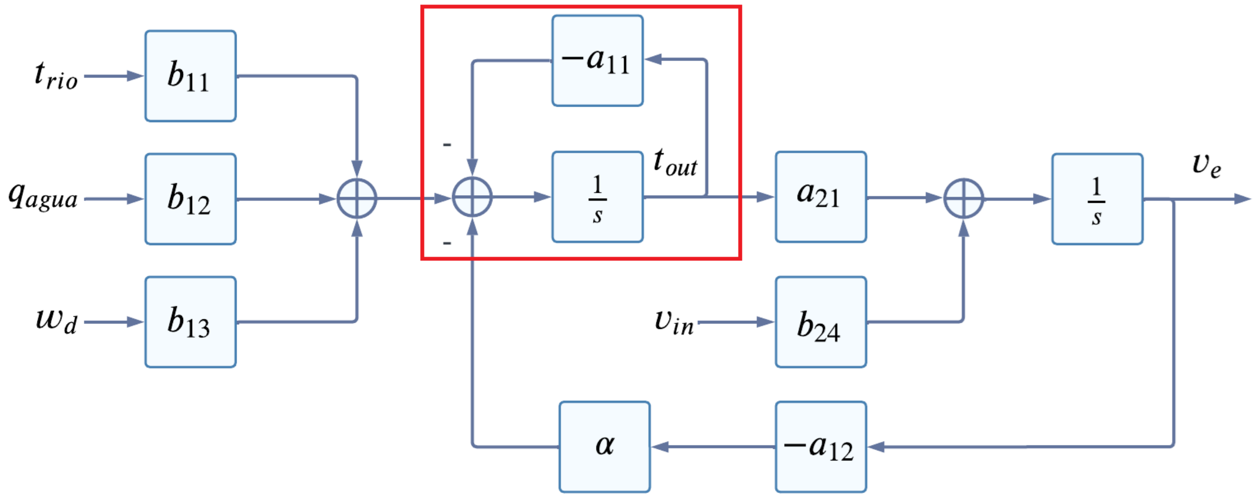
$$b_{13} = \frac{1}{V_P.c} \qquad b_{24} = \frac{R_A}{RCR_B}$$

5.



6.

Considerando la transferencia de la sección del sistema recuadrada en rojo

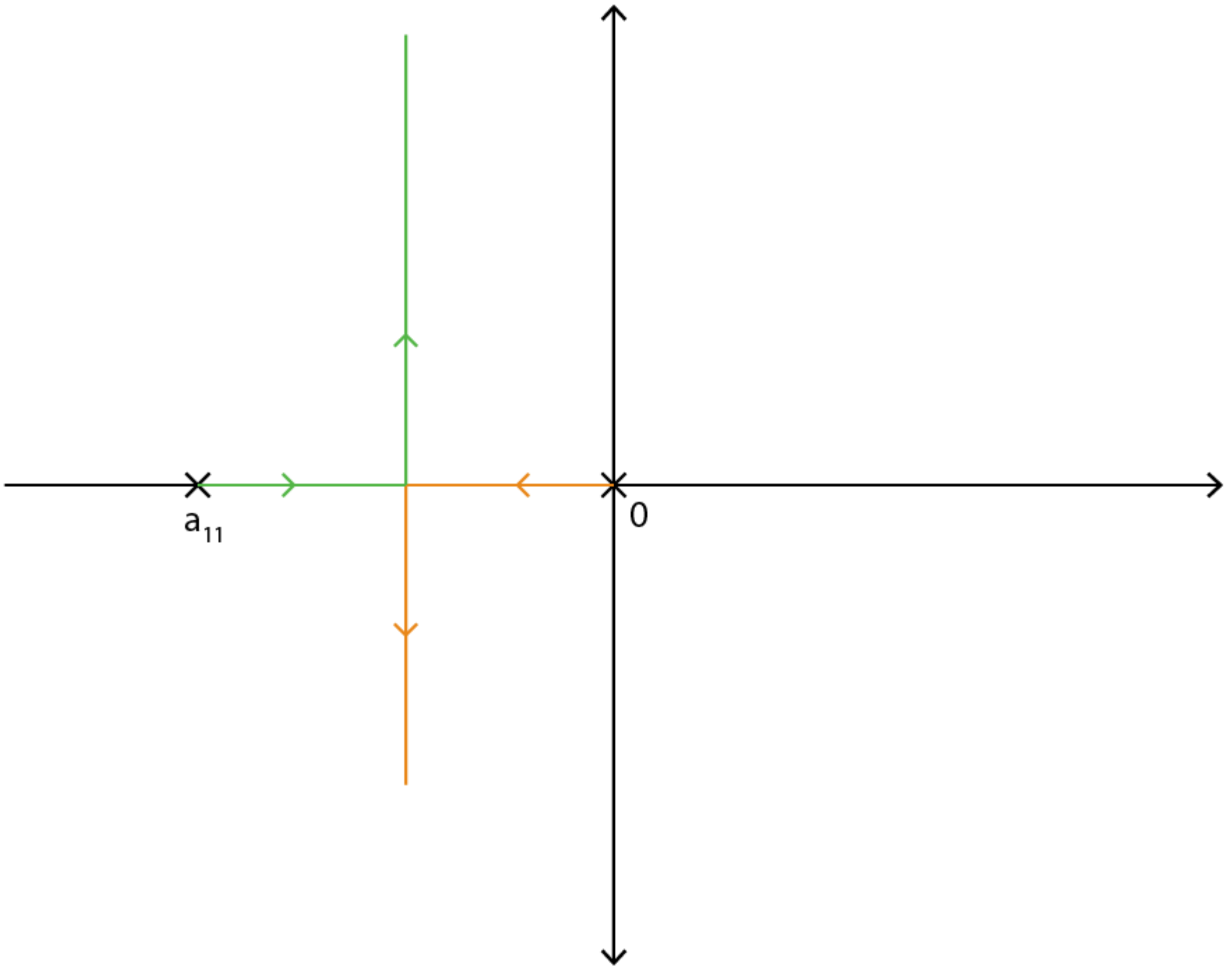


$$H^*(s) = \frac{1}{s - a_{11}}$$

La transferencia en lazo abierto del sistema es:

$$H_{OL}(s) = -\frac{1}{s - a_{11}}.a_{21}.\frac{1}{s}a_{12}.\alpha = \frac{-a_{21}.a_{12}}{s(s - a_{11})}.\alpha$$

Considerando que a_{11} es un entero negativo, el LGR es de la forma



7.

$$\frac{dH_{OL}}{ds}(s) = \frac{-a_{21}.a_{12}}{s^2(s-a_{11})^2}.\left(\frac{s}{2}-a_{11}\right)$$

El punto de amortiguamiento crítico se da en $\frac{a_{11}}{2}$.

Dado que

$$H_{CL}(s) = -\frac{-a_{21}.a_{12}.\alpha}{s^2 - a_{11}s - \alpha.a_{21}.a_{12}} = \frac{-a_{21}.a_{12}}{\left(s-\frac{a_{11}}{2}\right)^2}.\alpha$$

$$-\alpha.a_{21}.a_{12} = \frac{a_{11}^2}{4}$$

$$\alpha = \frac{-a_{11}^2}{4.a_{21}.a_{12}}$$

8.

El sistema tiene error en régimen nulo frente al escalón en q_{agua}. Conceptualmente, el enfriador complementará la falta de potencia de enfriamiento en el flujo de entrada