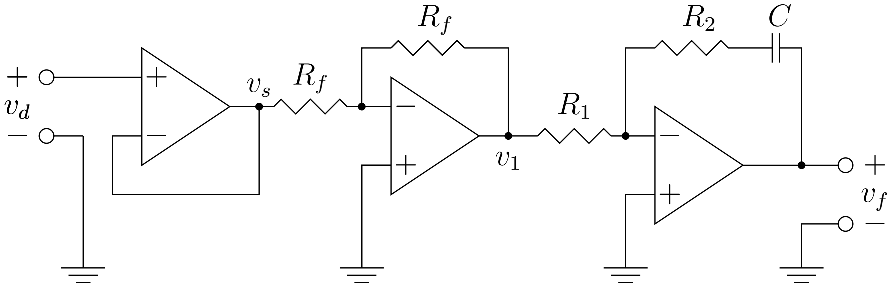
Problema 2 (solución)

Parte 1

Sean v_s y v_1 las tensiones indicadas en la siguiente figura.



El filtro consta de:

- Un seguidor (para no cargar al detector de fase), por lo que $\frac{V_s(s)}{V_d(s)} = 1$.
- Un inversor, por lo que $\frac{V_1(s)}{V_s(s)} = -1$.
- Un bloque de transferencia $\frac{V_f(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2Cs+1}{R_1C_2s} = -\frac{\tau_2 s+1}{\tau_1 s}$, lo cual surge de plantear $\frac{V_1(s)}{R_1} = \frac{-V_f}{R_2 \| \frac{1}{Cs}}$.

Entonces la transferencia del filtro es:

$$F(s) = \frac{\tau_2 s + 1}{\tau_1 s}.$$

Parte 2

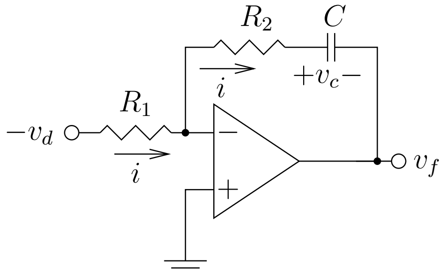
Detector de fase

Según el modelo simplificado del PLL,

$$v_d = K_d \operatorname{sen}(\theta_r - \theta_o). \tag{1}$$

Filtro

Sean i y v_c la como se indican en la siguiente figura.



Se tiene que $C\dot{v}_c = i$ y $i = -\frac{v_d}{R_1} = -\frac{v_c+v_f}{R_2}$, entonces

$$\dot{v}_c = -\frac{v_d}{R_1 C} = -\frac{v_d}{\tau_1}, \tag{2}$$

$$v_f = -v_c + \frac{R_2}{R_1} v_d = -v_c + \frac{\tau_2}{\tau_1} v_d. \tag{3}$$

VCO

Según el modelo simplificado del PLL,

$$\dot{\theta}_o = \omega_o + K_0 v_f. \tag{4}$$

Representación en variables de estado

De (1) – (4), eliminando v_d y v_f resulta la siguente representación en variables de estado:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\theta_o \\ v_c\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\omega_o + K_o\left(-v_c + \frac{\tau_2}{\tau_1} K_d \operatorname{sen}(\theta_r - \theta_o)\right) \\ -\frac{K_d}{\tau_1}\operatorname{sen}(\theta_r - \theta_o)\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_o \\ v_c\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Parte 3

Para $\theta_r = \theta_r^0$ (constante dada), en equilibrio,

$$\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_o + K_o\left(-v_c + \frac{\tau_2}{\tau_1} K_d \operatorname{sen}\left(\theta_r^0 - \theta_o\right)\right) \\ -\frac{K_d}{\tau_1}\operatorname{sen}\left(\theta_r^0 - \theta_o\right)\end{bmatrix}.$$

Entonces los puntos de equilibrio $(\theta_o, v_c) = \left(\theta_o^0, v_c^0\right)$, correspondientes a $\theta_r = \theta_r^0$, son los que verifican:

$$\begin{cases}\theta_r^0 - \theta_o^0 = h\pi, \text{ con } h \in \mathbb{Z}, \\ v_c^0 = \frac{\omega_o}{K_o}.\end{cases} \tag{6}$$

Parte 4

Linealizando (5) en torno a $(\theta_o, v_c) = \left(\theta_o^0, v_c^0\right)$ tal que (6),

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o \\ \tilde{v}_c\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\frac{\tau_2}{\tau_1} K_d K_o \cos\left(\theta_r^0 - \theta_o^0\right) & -K_o \\ \frac{K_d}{\tau_1}\cos\left(\theta_r^0 - \theta_o^0\right) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o \\ \tilde{v}_c\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\tau_2}{\tau_1} K_d K_o \cos\left(\theta_r^0 - \theta_o^0\right) \\ -\frac{K_d}{\tau_1}\cos\left(\theta_r^0 - \theta_o^0\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_r\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o \\ \tilde{v}_c\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o \\ \tilde{v}_c\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-\frac{\tau_2}{\tau_1} K_d K_o (-1)^h & -K_o \\ \frac{K_d}{\tau_1}(-1)^h & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o \\ \tilde{v}_c\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\tau_2}{\tau_1} K_d K_o (-1)^h \\ -\frac{K_d}{\tau_1}(-1)^h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_r\end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_o \\ \tilde{v}_c\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

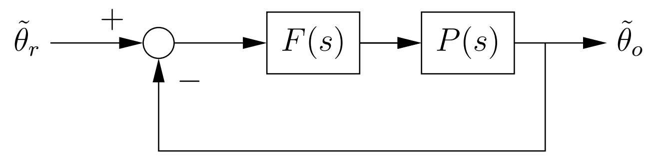
Parte 5

Aplicando transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) a (7), eliminando $V_c(s)$ y operando, se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) \triangleq \frac{\tilde{\theta}_o(s)}{\tilde{\theta}_r(s)} = \frac{\frac{K(-1)^h}{\tau_1}(1+\tau_2 s)}{s^2 + \frac{\tau_2}{\tau_1}K(-1)^h s + \frac{K(-1)^h}{\tau_1}}, \tag{8}$$

donde $K \triangleq K_d K_o$.

Se pide verificar que el modelo linealizado del PLL se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques, donde $F(s)$ es la función de transferencia del filtro hallada en la parte 1, y $P(s)$ es una función de transferencia a determinar.



Sea $L(s) \triangleq F(s)P(s)$. Como la función de transferencia de lazo cerrado es $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$, despejando $L(s)$, sustituyendo $T(s)$ (dada por (8)) y operando, resulta

$$L(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)} = \underbrace{\left(\frac{\tau_2 s + 1}{\tau_1 s}\right)}_{F(s)}\left(\frac{K(-1)^h}{s}\right).$$

En la expresión anterior se identifica el factor $F(s)$ correspondiente al filtro, así que $P(s)$ debe ser el factor restante:

$$P(s) = \frac{K(-1)^h}{s}.$$

Parte 6

Para que $T(s)$ sea estable, todos sus polos deben tener parte real negativa. Los polos de $T(s)$ son las raíces de $s^2 + \frac{\tau_2}{\tau_1}K(-1)^h s + \frac{K(-1)^h}{\tau_1}$. Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, se concluye que $T(s)$ es estable si y solo si h es par. Por lo que los posibles puntos de equilibrio $(\theta_o, v_c) = \left(\theta_o^0, v_c^0\right)$ a elegir como punto de operación, son los de la forma (6) con h par. Como para todo h par, la función de transferencia del modelo linealizado es la misma, por simplicidad, se toma $h = 0$ para elegir $(\theta_o, v_c) = \left(\theta_r^0, \frac{\omega_0}{K_o}\right)$ como punto de operación.

Parte 7

Para el punto de operación elegido,

$$T(s) = \frac{\tilde{\theta}_o(s)}{\tilde{\theta}_r(s)} = \frac{\frac{K}{\tau_1}(1+\tau_2 s)}{s^2 + \frac{\tau_2}{\tau_1}Ks + \frac{K}{\tau_1}} = \frac{\omega_n^2\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s\right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

donde se introdujeron la frecuencia natural, ω_n, y la relación de amortiguamiento, ζ, del sistema realimentado:

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K}{\tau_1}},$$
$$\zeta \triangleq \frac{\tau_2}{2}\sqrt{\frac{K}{\tau_1}} = \frac{\tau_2}{2}\omega_n.$$

Para que se cumpla $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\omega_n = 10^4\,\mathrm{rad/s}$, se debe tomar K, τ_1 y τ_2 de forma tal que

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{K}{\tau_1}} = 10^4\,\mathrm{s}^{-1}, \\ \tau_2 = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{K}{\tau_1}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{10^4}\mathrm{s} \approx 141{,}4\,\mu\mathrm{s}. \end{cases}$$

Parte 8

Margen de fase y margen de ganancia

La función de transferencia de lazo abierto, $L(s)$, puede expresarse en términos de ζ y ω_n de la siguiente forma:

$$L(s) = \left(\frac{1+\tau_2 s}{\tau_1 s}\right)\left(\frac{K}{s}\right) = \frac{\frac{K}{\tau_1}}{s^2}(1+\tau_2 s) = \frac{\omega_n^2}{s^2}\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s\right).$$

Como para el diseño del punto anterior se impuso $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene que

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2}\left(1 + \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\omega_n}s\right).$$

Sea ω_c tal que $|L(\jmath\omega_c)| = 1$, entonces

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c^2}\sqrt{1 + 2\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}} = 1.$$

Introduciendo $x \triangleq \left(\frac{\omega_n}{\omega_c}\right)^2 > 0$,

$$\frac{1}{x}\sqrt{1+2x} = 1 \implies \sqrt{1+2x} = x \implies 1 + 2x = x^2 \implies x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Resolviendo para x y descartando la solución negativa, se obtiene $x = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$. Entonces, la frecuencia de cruce de ganancia es

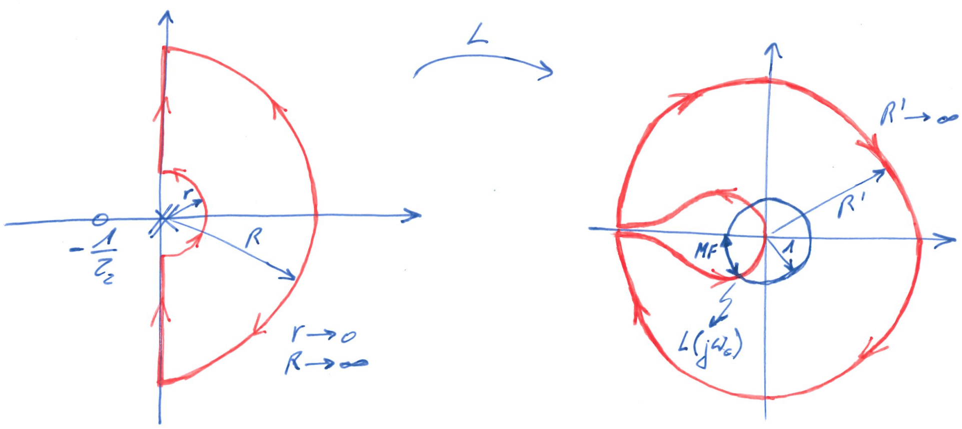
$$\omega_c = \omega_n\sqrt{\frac{2+\sqrt{8}}{2}} \approx 15\,538\,\mathrm{rad/s},$$

donde se usó que $\omega_n = 10^4\,\mathrm{rad/s}$ según el diseño de la parte anterior.

El margen de fase del sistema realimentado es:

$$\mathrm{MF} = \angle\left(L(\jmath\omega_c)\right) + \pi = -\pi + \arctan\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\omega_n}\omega_c\right) + \pi = \arctan\left(\sqrt{2+\sqrt{8}}\right) \approx 65{,}5^\circ.$$

El margen de ganancia del sistema realimentado es infinito, ya que el diagrama de Nyquist de $L(s)$ no intersecta el eje real negativo:



Error en régimen

Se pide calcular el error en régimen ante entradas de la forma:

a) $\tilde{\theta}_r(t) = A\mathbb{1}(t)$,

b) $\tilde{\theta}_r(t) = At\mathbb{1}(t)$,

c) $\tilde{\theta}_r(t) = A\frac{t^2}{2}\mathbb{1}(t)$,

El sistema realimentado es estable y de tipo 2 (ya $L(s)$ tiene dos polos en $s = 0$). Por lo tanto, el error en régimen es nulo ante entradas de la forma a) y b).

La constante de aceleración es

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 L(s) = \omega_n^2 = 10^8\,\mathrm{s}^{-2},$$

por lo que el error en régimen ante entradas de la forma c) es $\frac{A}{\omega_n^2} = 10^{-8}A$.

Parte 9

Al introducir el capacitor de capacidad C_f, según se indica, se agrega un factor $\frac{1}{1+\tau_f s}$ a la transferencia de filtro:

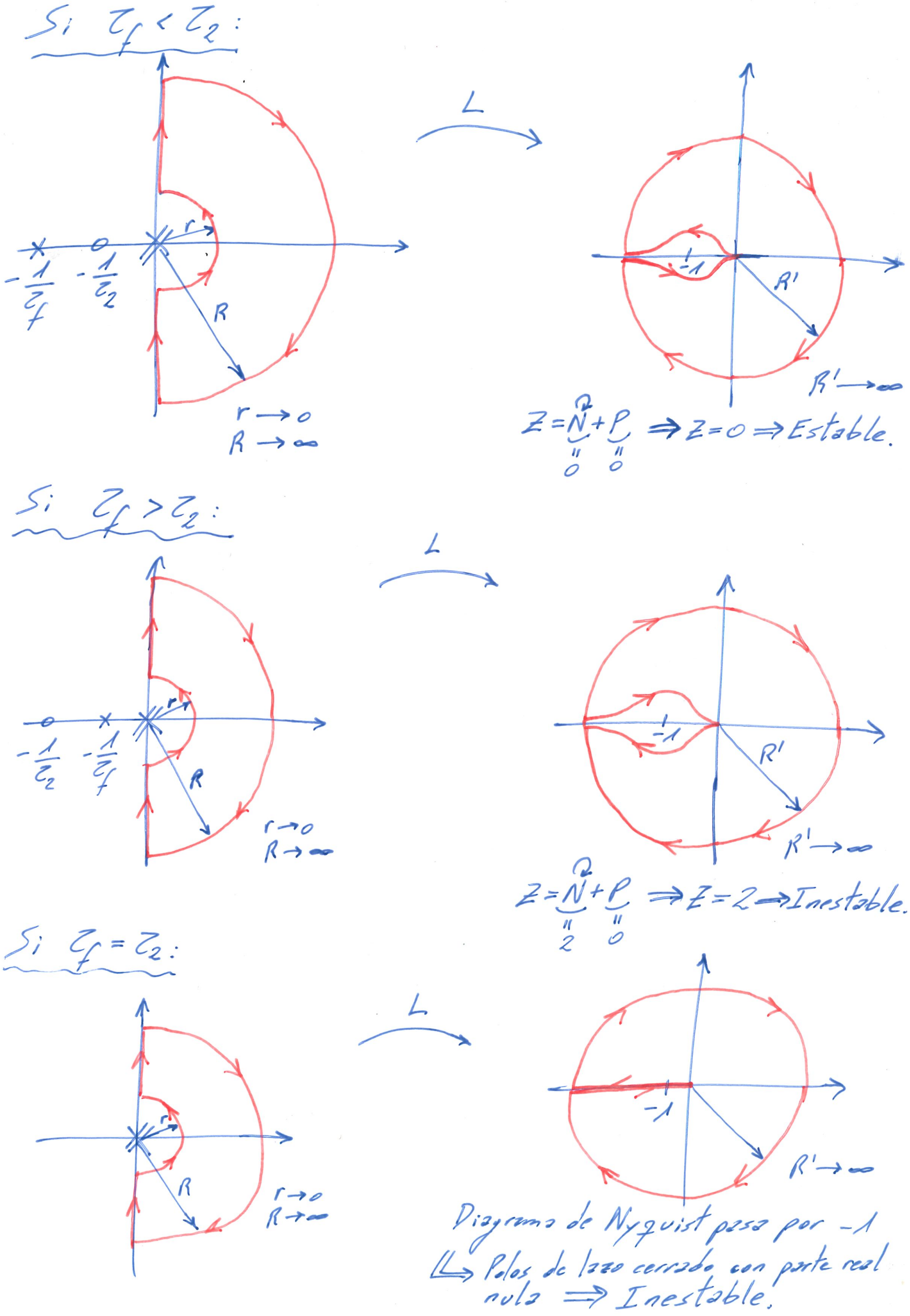
$$F(s) = \frac{1}{1+\tau_f s}\left(\frac{1+\tau_2 s}{\tau_1 s}\right).$$

La transferencia de lazo abierto se convierte entonces en:

$$L(s) = F(s)P(s) = \left(\frac{K}{\tau_1}\right)\frac{1+\tau_2 s}{s^2\,(1+\tau_f s)} = \left(\frac{K\tau_2}{\tau_1\tau_f}\right)\frac{s+\frac{1}{\tau_2}}{s^2\left(s+\frac{1}{\tau_f}\right)}.$$

Aplicando el criterio de Nyquist, se concluye que el sistema realimentado es estable si y solo si τ_f se elige de forma tal que

$$\tau_f < \tau_2 \approx 141{,}4\,\mu\mathrm{s}. \tag{9}$$



Para no afectar significativamente el margen de fase antes calculado, hay elegir el nuevo polo del filtro al menos una década por encima de la frecuencia de cruce de ganancia:

$$\frac{1}{\tau_f} > 10\omega_c \implies \tau_f < \frac{1}{10\omega_c} \approx 6{,}435\,\mu\text{s}.$$

Por otro lado, para que la atenuación de armónicos de alta frecuencia sea lo más efectiva posible, conviene que la frecuencia $\frac{1}{\tau_f}$ se elija lo más pequeña que sea posible.

Por lo anterior, se elige:

$$\tau_f = \frac{1}{10\omega_c} \approx 6{,}435\,\mu\text{s}. \tag{10}$$

Si τ_f se elige respetando (9), la modificación del filtro no tiene efecto sobre el margen de ganancia, que sigue siendo ∞ (porque el diagrama de Nyquist de $L(s)$ sigue sin intersectar al eje real negativo). Este es justamente el caso, según la elección (10)