

Solución del problema 1

Parte 1

Balances volumétricos aplicados a los tanques 1 y 2:

$$A_1 \dot{h}_1 = q_{in} - q_1 - q_2, \quad (1)$$

$$A_2 \dot{h}_2 = q_2. \quad (2)$$

Flujos laminares a través de las válvulas 1 y 2:

$$q_1 = \frac{h_1}{R_1}, \quad (3)$$

$$q_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_2}. \quad (4)$$

Caudal forzado por la bomba:

$$q_{in} = K_b v. \quad (5)$$

Parte 2

Tomando transformada de Laplace sobre las ecuaciones (1) a (5):

$$A_1 s H_1(s) = Q_{in}(s) - Q_1(s) - Q_2(s), \quad (6)$$

$$A_2 s H_2(s) = Q_2(s), \quad (7)$$

$$Q_1(s) = \frac{H_1(s)}{R_1}, \quad (8)$$

$$Q_2(s) = \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_2}, \quad (9)$$

$$Q_{in}(s) = K_b V(s) \quad (10)$$

Sustituyendo (8), (9) y (10) en (6) y (7) y operando:

$$\left(A_1 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H_1(s) - \frac{1}{R_2} H_2(s) = K_b V(s), \quad (11)$$

$$\left(A_2 s + \frac{1}{R_2} \right) H_2(s) = \frac{1}{R_2} H_1(s). \quad (12)$$

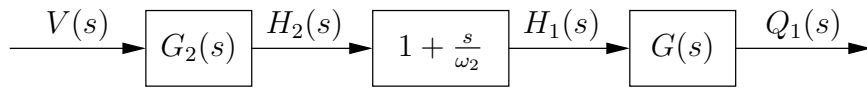
Despejando $H_1(s)$ de (12):

$$H_1(s) = (1 + A_2 R_2 s) H_2(s). \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (11) y operando:

$$H_2(s) = \frac{R_1 K_b}{A_1 A_2 R_1 R_2 s^2 + (A_1 R_1 + A_2 (R_1 + R_2)) s + 1} V(s). \quad (14)$$

Las expresiones (14), (13) y (8) se pueden representar mediante el siguiente diagrama de bloques:



donde

$$G_2(s) = \frac{R_1 K_b}{A_1 A_2 R_1 R_2 s^2 + (A_1 R_1 + A_2 (R_1 + R_2)) s + 1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{A_2 R_2}, \quad G(s) = \frac{1}{R_1}.$$

Parte 3

Para

$$A_1 = 5 \text{ m}^2, \quad A_2 = 2 \text{ m}^2, \quad R_1 = 20 \text{ s/m}^2, \quad R_2 = 10 \text{ s/m}^2, \quad K_b = 0,01 \text{ m}^3/(\text{s V}),$$

resulta:

$$G_2(s) = \frac{0,2}{2000s^2 + 160s + 1} = \frac{0,0001}{s^2 + 0,08s + 0,0005} = \frac{0,0001}{(s + \alpha)(s + \beta)},$$

$$\alpha \approx 0,07317 \text{ rad/s}, \quad \beta \approx 0,006834 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 0,05 \text{ rad/s}.$$

Se requiere que el error en régimen ante una señal de referencia, $r(t)$, en forma de rampa de pendiente unitaria sea igual a 5 m. Entonces el sistema realimentado debe ser de tipo 1 y tal que:

$$e_{\infty}^{\text{rampa}} = \frac{1 \text{ m/s}}{K_v} = 5 \text{ m}.$$

Es decir,

$$K_v = 0,2 \text{ s}^{-1}. \quad (15)$$

Como $G_2(s)$ no tiene polos en el origen, $C(s)$ debe tener un polo en el origen.

Control integral

Sea $C(s) = \frac{K_c}{s}$. Como $L(s) = C(s)G_2(s)$, y por definición de K_v ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G_2(s) = K_c R_1 K_b, \quad (16)$$

de (15) y (16), resulta

$$K_c = \frac{0,2 \text{ s}^{-1}}{R_1 K_b} = 1 \text{ V m}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (17)$$

La función de transferencia de lazo cerrado es:

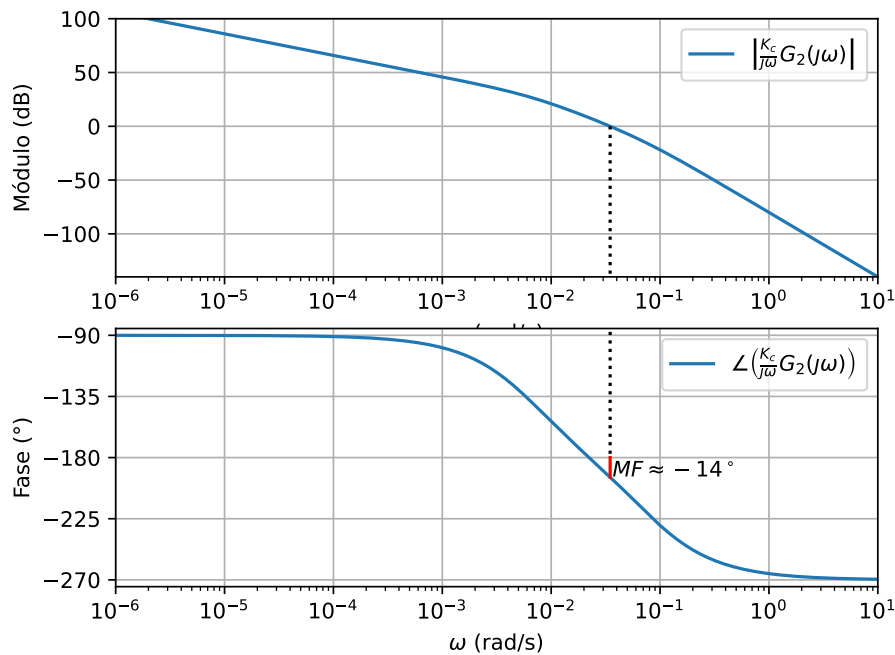
$$G_{lc}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{0,2}{2000s^3 + 160s^2 + s + 0,2}.$$

El arreglo de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del sistema realimentado es:

s^3	2000	1
s^2	160	0,2
s^1	-1,5	
s^0	0,2	

Como hay dos cambios de signo en la primera columna, se concluye que $G_{lc}(s)$ tiene dos polos inestables, por lo que el control integral no es viable.

Otra forma de ver que el control integral no es viable, es observando que el margen de fase es negativo como se aprecia en el siguiente diagrama de Bode:



Para corregir el margen de fase se puede optar por una compensación por adelanto o por atraso de fase. La primera aumentaría la frecuencia de cruce de ganancia mientras que la última la disminuiría. Como se requiere que la frecuencia de cruce de ganancia sea menor a ω_2 y la frecuencia de cruce de ganancia que se obtiene con el control integral (aproximadamente igual a $0,0348 \text{ rad/s}$) es muy próxima a $\omega_2 = 0,05 \text{ rad/s}$, se opta por una compensación por atraso de fase.

Control integral con compensación por atraso de fase

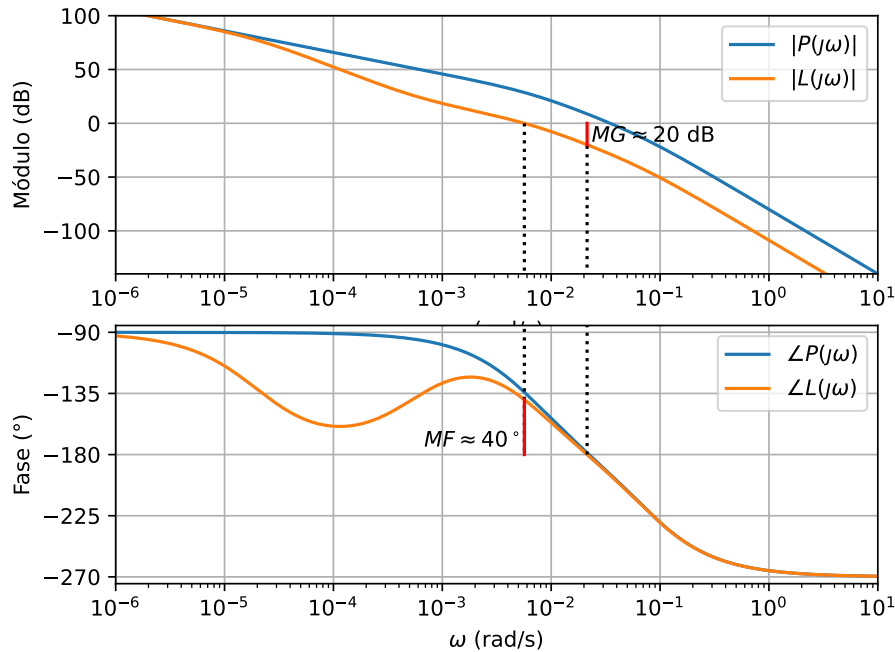
Sea $C(s) = \frac{K_c}{s} D(s)$ con $D(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$, $0 < a < 1$ y $T > 0$. Sea también $P(s) = \frac{K_c}{s} G_2(s)$. Se requiere un margen de fase de al menos 40° .

Sea $\tilde{\omega}_c$ tal que $\angle(P(j\tilde{\omega}_c)) = -180^\circ + 40^\circ + 6^\circ = -134^\circ$. Del diagrama de Bode anterior, se determina $\tilde{\omega}_c \approx 0,00565 \text{ rad/s}$. Se elige a de forma tal que $a|P(j\tilde{\omega}_c)| = 1$, es decir,

$$a = \frac{1}{|P(j\tilde{\omega}_c)|} \approx 0,03677.$$

Finalmente se elige T de forma tal que $\frac{1}{aT} \ll \tilde{\omega}_c$, por ejemplo:

$$T = \frac{10}{a\tilde{\omega}_c} \approx 48138 \text{ s}.$$



Parte 4

Para el control integral con compensación por atraso de fase, diseñado en la parte anterior, se puede verificar que:

- Margen de fase $\approx 40,4^\circ$.
- Margen de ganancia $\approx 19,9$ dB.

Parte 5

Se tiene que $\frac{H_1}{R}(s) = G_{lc}(s) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)$.

Como $\frac{H_1}{R}(s)$ es estable, para una entrada de referencia $r(t) = 2 + \sin(\omega_2 t) = 2 \cos(0t) + 1 \sin(\omega_2 t)$, la salida en régimen sinusoidal permanente es:

$$\begin{aligned}
 h_1(t) &= 2 \left| \frac{H_1}{R}(0) \right| \cos\left(0t + \angle\left(\frac{H_1}{R}(0)\right)\right) + 1 \left| \frac{H_1}{R}(j\omega_2) \right| \sin\left(\omega_2 t + \angle\left(\frac{H_1}{R}(j\omega_2)\right)\right) \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot \cos(0t + 0) + 1 \cdot \left| \frac{L(j\omega_2)}{1 + L(j\omega_2)} \left(1 + \frac{j\omega_2}{\omega_2}\right) \right| \sin\left(\omega_2 t + \angle\left(\frac{L(j\omega_2)}{1 + L(j\omega_2)} \left(1 + \frac{j\omega_2}{\omega_2}\right)\right)\right) \\
 &= 2 + \left| \frac{L(j\omega_2)}{1 + L(j\omega_2)} \right| |(1 + j)| \sin\left(\omega_2 t + \angle\left(\frac{L(j\omega_2)}{1 + L(j\omega_2)}\right) + \angle(1 + j)\right) \\
 &= 2 + \left| \frac{L(j\omega_2)}{1 + L(j\omega_2)} \right| \sqrt{2} \sin\left(\omega_2 t + \angle\left(\frac{L(j\omega_2)}{1 + L(j\omega_2)}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &\approx 2 + 0,01669\sqrt{2} \sin(\omega_2 t - 207,63^\circ + 45^\circ) \\
 &\approx 2 + 0,0236 \sin(\omega_2 t - 162,63^\circ)
 \end{aligned}$$

Parte 6

Para $L'(s) = 1,5L(s)$, se reducen los márgenes de estabilidad:

- Margen de fase $\approx 32,6^\circ$,
- Margen de ganancia $\approx 16,4$ dB.

La respuesta a escalón de lazo cerrado tendrá una respuesta más oscilatoria con mayor sobretiro y mayor tiempo de asentamiento que la diseñada.