

## Problema 1

En la Figura 1 se representa el sistema de posicionamiento angular de una antena parabólica de una estación satelital. La misma está montada sobre un eje horizontal acoplado a un motor de corriente continua, de constante  $K_m$ , resistencia de armadura  $R$ , e inductancia despreciable.

El momento de inercia complejo del eje es  $J$ . La antena está balanceada con respecto al eje de giro mediante un contrapeso adecuado, por lo que se puede asumir que sobre el eje solamente actúan: un par de rozamiento viscoso de constante de proporcionalidad  $B$ ; un par variable,  $T$ , debido al viento y otras cargas mecánicas esporádicas (por ejemplo el acoplamiento de un carro para tareas de mantenimiento); y el par ejercido por el motor,  $T_m$ , de igual signo que la corriente de armadura del motor,  $i$ .

Se considera únicamente el movimiento vertical de la antena según el ángulo de giro,  $\theta$ , del mencionado eje. El sistema de posicionamiento es comandado por un voltaje  $u$  que alimenta el driver del motor. El driver se modela como un amplificador de voltaje de ganancia,  $A$ , positiva, impedancia de entrada infinita e impedancia de salida nula.

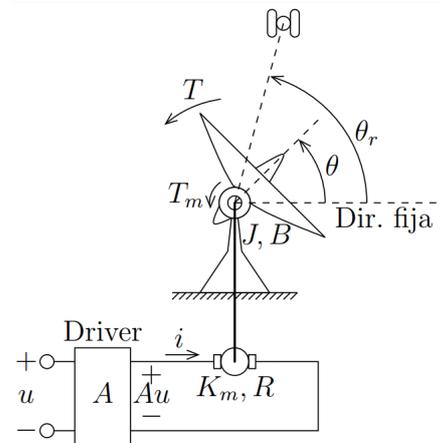


Figura 1

1. Modele el sistema de salida  $\theta$  y entradas  $u$  y  $T$ , mediante un diagrama de bloques en el que se utilicen solamente bloques proporcionales, sumadores e integradores. Justifique.
2. Halle una representación en variables de estado para el sistema.
3. Describa la dinámica del sistema mediante una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^n \theta}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \theta}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \theta = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u + c_0 \frac{d^q T}{dt^q} + c_1 \frac{d^{q-1} T}{dt^{q-1}} + \dots + c_q T, \quad (1)$$

donde  $n, m, q \in \mathbb{N}$  y  $n > 0$ . Determine los coeficientes de la ecuación diferencial en función de los parámetros del problema.

Para las siguientes partes del problema se asumen conocidos los coeficientes de la ecuación (1).

El sistema de posicionamiento cuenta con un sensor que, a partir de la diferencia de potencia recibida, desde un satélite, entre la antena de la Figura 1 y otra antena secundaria (no representada en la figura), brinda una señal de voltaje  $w = Ke$ , donde  $K$  es una ganancia positiva ajustable y  $e = \theta_r - \theta$  es la señal de error de seguimiento de la posición angular del satélite,  $\theta_r$ . En la Figura 2 se muestra como se realimenta el sistema de posicionamiento con un controlador serie de función de transferencia  $D(s)$ .

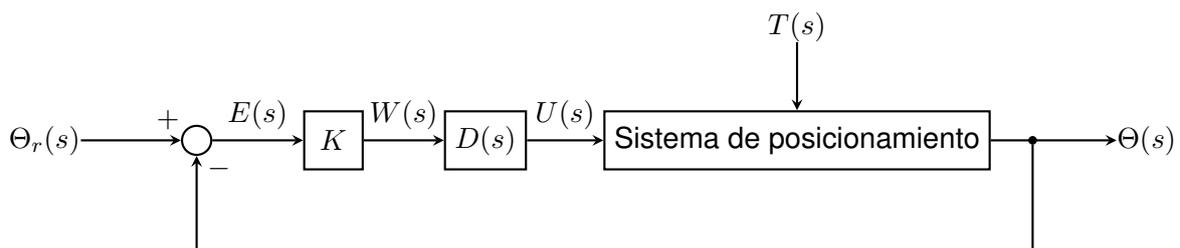


Figura 2

4. Se requiere que:

- a) el error de seguimiento en régimen sea nulo ante perturbaciones  $T$  en forma de escalón, y
- b) el error de seguimiento en régimen sea nulo ante señales de referencia  $\theta_r$  en forma de escalón.

Proponga una función de transferencia parametrizada para  $D(s)$ , lo más sencilla posible (i.e., con la menor cantidad de singularidades), que cumpla con ambos requerimientos e indique qué condiciones deben verificar sus parámetros.

5. ¿Es posible sintonizar el controlador, caracterizado por  $D(s)$ , y la ganancia  $K$ , del sensor, de forma tal que la respuesta transitoria del sistema realimentado (de entrada  $\theta_r$  y salida  $\theta$ ) no presente oscilaciones ante un escalón en  $\theta_r$ ? Justifique.

*Sugerencia:* Discuta cómo varía el lugar geométrico de las raíces del sistema realimentado, paramétrico en  $K$ , al variar la sintonización del controlador.

Para las siguientes partes del problema se ignorará el estudio de la parte 5. Además, se trabajará con la función de transferencia parametrizada ya propuesta para  $D(s)$  en la parte 4 y se supondrá que sus parámetros verifican las condiciones ahí halladas.

6. Dados  $\varepsilon, p > 0$ , suponga que los únicos requerimientos de diseño son los de la parte 4 más el siguiente:

- error en régimen menor a  $\varepsilon$  ante una referencia  $\theta_r$  en forma de rampa con pendiente  $p$ .

¿Es posible cumplir con este nuevo requerimiento con la propuesta dada para  $D(s)$ ? En tal caso:

- ¿qué condiciones adicionales se deben cumplir para atenderlo?
- ¿qué limitaciones prácticas impedirían tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?

Justifique sus respuestas.

7. Dados  $\varepsilon, A_T, \omega_T > 0$ , suponga que los únicos requerimientos de diseño son los de la parte 4 más el siguiente:

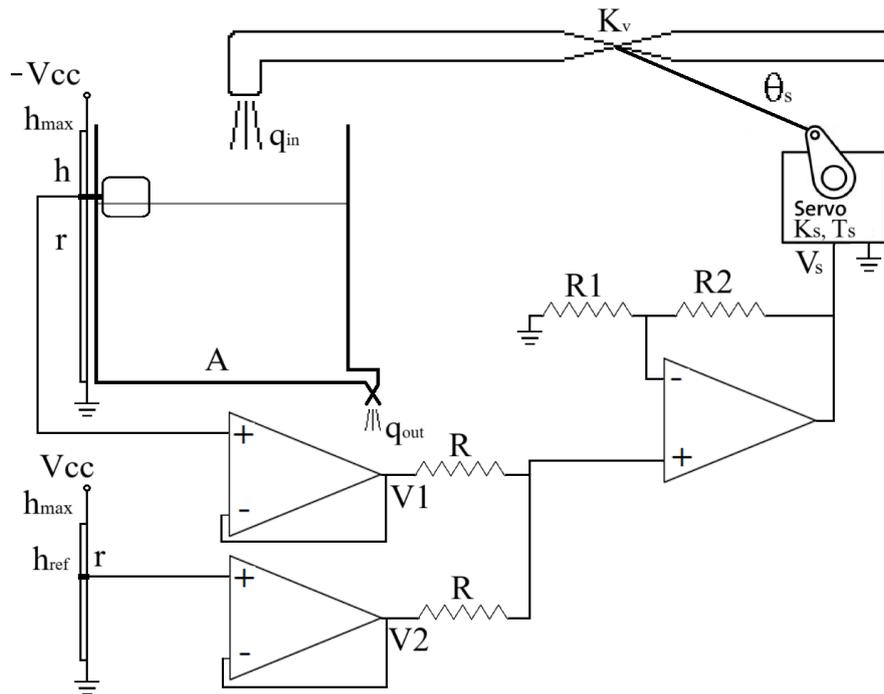
- error en régimen de amplitud menor a  $\varepsilon$  ante una perturbación sinusoidal  $T$ , de amplitud  $A_T$  y frecuencia angular  $\omega_T$ .

¿Es posible cumplir con este nuevo requerimiento con la propuesta dada para  $D(s)$ ? En tal caso:

- ¿qué condiciones adicionales se deben cumplir para atenderlo?
- ¿qué limitaciones prácticas impedirían tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?

Justifique sus respuestas.

## Problema 2



Sistema de control del nivel de agua del tanque.

En la figura se muestra el sistema de control del nivel de agua en un tanque de sección  $A$  y altura  $h_{max}$ . Dentro del tanque hay una boya ligada a un potenciómetro con el que se mide el nivel de agua  $h$  mediante el voltaje de salida, el cual es un divisor de tensión entre las partes superior e inferior del potenciómetro. Luego de una serie de amplificadores operacionales ideales, ese voltaje es comparado con la entrada del sistema que es la salida de otro potenciómetro que representa una altura de referencia  $h_{ref}$ . Finalmente, la señal de voltaje alcanza un servomecanismo que acciona una válvula que controla el caudal de agua que ingresa al tanque  $q_{in}$ . El caudal de salida  $q_{out}$  depende de un sistema externo sobre el cual no se tiene control, por lo que se lo modela como una entrada.

Datos:

- Servo:  $\frac{\theta_s(s)}{V_s(s)} = \frac{K_s}{1+T_s s}$
- Válvula:  $q_{in} = K_v \theta_s$
- Valores numéricos:  $K_s = 1 \text{ rad/V}$ ,  $K_v = 1 \text{ m}^3/(\text{s rad})$ ,  $V_{cc} = 10 \text{ V}$ ,  $h_{max} = 2,5 \text{ m}$ ,  $A = 4 \text{ m}^2$

### Parte 1

Ignorando los potenciómetros, calcule las funciones de transferencia de  $V_1$  (o  $V_2$ ) y  $q_{out}$  a  $h$ .

### Parte 2

Expresé  $V_1$  y  $V_2$  en función de  $h$  y  $h_{ref}$ , respectivamente, y demuestre que el sistema se puede representar por un diagrama de bloques como el que se muestra a continuación. Indique las expresiones de  $F(s)$  y  $P(s)$ .

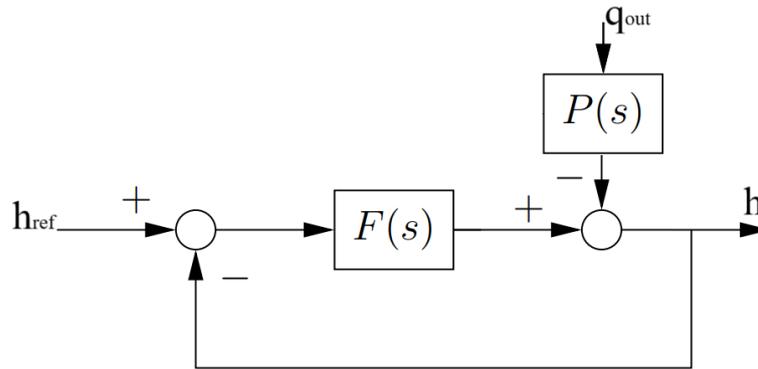


Diagrama de bloques del sistema.

### Parte 3

Se desea que los polos de la transferencia en lazo cerrado de  $h_{ref}$  a  $h$  sean  $-1 + j$  y  $-1 - j$ .

a) ¿Qué valor debe de tener  $T_s$  para que el lugar geométrico positivo, de parámetro  $k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ , pase por  $-1 + j$  y  $-1 - j$ ? Justifique mediante las reglas de construcción del lugar geométrico.

b) Si  $R_1 = 1k\Omega$ , ¿cuánto debe valer  $R_2$  para que los polos del lazo cerrado estén en el lugar deseado?

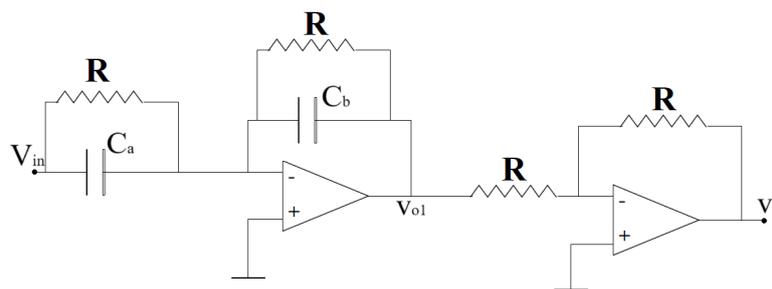
### Parte 4

Calcular el margen de fase del sistema resultante.

### Parte 5

Se desea mejorar el margen de fase del sistema de forma que el mismo esté en el rango de  $100^\circ \pm 10^\circ$ . Para ello, se conecta el siguiente bloque entre la salida del circuito sumador y la entrada al servomecanismo.

a) Demostrar que el circuito se puede utilizar como un compensador. Indique qué condición tienen que cumplir los componentes para que el mismo sea de adelanto de fase y cuales son los cambios de variable necesarios para que la transferencia del mismo tenga los parámetros  $T$  y  $a$  vistos en el curso.



Circuito del compensador.

b) Calcule un conjunto de valores para las resistencias y condensadores del circuito que hagan que el sistema total verifique el margen de fase deseado. Realice el calculo indicando valores pertinentes en un diagrama de Bode de la transferencia en lazo abierto original.

# Solución del problema 1

## Parte 1

Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito de armadura del motor:

$$Au - Ri - e_m = 0,$$

donde

$$e_m = K_m \dot{\theta}$$

es la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en el devanado de armadura del motor.

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación al eje:

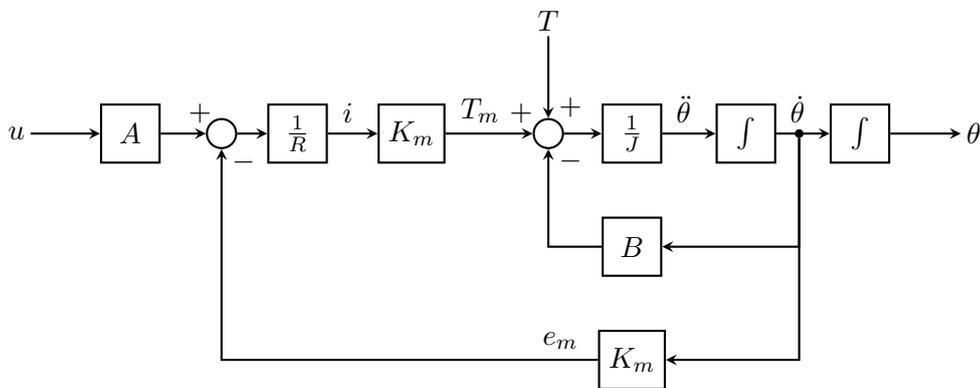
$$J\ddot{\theta} = T_m - B\dot{\theta} + T,$$

donde

$$T_m = K_m i$$

es el par que ejerce el motor sobre el eje.

A partir de las ecuaciones anteriores se construye el siguiente diagrama de bloques:



## Parte 2

A partir del diagrama de bloques de la parte anterior, tomando  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  como variables de estado, se construye la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B + \frac{K_m^2}{R}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_m A}{JR} & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{cases}$$

## Parte 3

De la segunda fila de la ley de evolución de estado de la representación en variables de estado:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{J} \left( B + \frac{K_m^2}{R} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{K_m A}{JR} u + \frac{1}{J} T.$$

Identificando los coeficientes de esta última ecuación con los de la ecuación dada, se encuentra que  $n = 1$ ,  $m = 0$ ,  $q = 0$  y además:

$$a_1 = \frac{1}{J} \left( B + \frac{K_m^2}{R} \right), \quad b_0 = \frac{K_m A}{JR}, \quad c_0 = \frac{1}{J}.$$

## Parte 4

De la parte anterior se tiene que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta}{dt} = b_0 u + c_0 T, \quad (2)$$

donde  $a_1$ ,  $b_0$  y  $c_0$  se asumen conocidos.

Tomando transformada de Laplace, con condiciones iniciales nulas, sobre (2):

$$s^2\Theta(s) + a_1 s\Theta(s) = b_0 U(s) + c_0 T(s).$$

Despejando  $\Theta(s)$ :

$$\Theta(s) = \frac{b_0}{s(s+a_1)} U(s) + \frac{c_0}{s(s+a_1)} T(s). \quad (3)$$

Según el diagrama de bloques de la Figura 2:

$$U(s) = KD(s) (\Theta_r(s) - \Theta(s)), \quad (4)$$

$$E(s) = \Theta_r(s) - \Theta(s). \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (3) y despejando  $\Theta(s)$ :

$$\Theta(s) = \frac{b_0 KD(s)}{s^2 + a_1 s + b_0 KD(s)} \Theta_r(s) + \frac{c_0}{s^2 + a_1 s + b_0 KD(s)} T(s). \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5) y despejando  $E(s)$ :

$$E(s) = \frac{s(s+a_1)}{s^2 + a_1 s + b_0 KD(s)} \Theta_r(s) - \frac{c_0}{s^2 + a_1 s + b_0 KD(s)} T(s). \quad (7)$$

Se requiere que el error de seguimiento en régimen sea nulo ante perturbaciones  $T$  en forma de escalón.

Aplicando el teorema del valor final, se tiene que ante entradas  $T$  en forma de escalón, de amplitud  $T_0$ , el error de seguimiento en régimen es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( -\frac{c_0}{s^2 + a_1 s + b_0 KD(s)} \right) \frac{T_0}{s} \quad (8)$$

si todos los ceros de  $s^2 + a_1 s + b_0 KD(s)$  tienen parte real estrictamente negativa, es decir si las transferencias que se reconocen en (6), de  $\theta_r$  a  $\theta$  y de  $T$  a  $\theta$ , y en (7), de  $\theta_r$  a  $e$  y de  $T$  a  $e$ , son estables.

Examinando (8), se deduce que  $D(s)$  debe tener al menos un polo en  $s = 0$  para que el límite resulte nulo.

Como primera opción se podría considerar la posibilidad de tomar  $D(s) = \frac{1}{s}$ , pero en tal caso  $s^2 + a_1 s + b_0 KD(s) = \frac{s^3 + a_1 s^2 + b_0 K}{s}$  no tendría todos sus ceros con parte real negativa, por ser su numerador un polinomio incompleto, y entonces el lazo cerrado resultaría inestable.

Se agrega entonces un cero en  $-\frac{1}{T_i}$ , eligiendo  $D(s)$  de la siguiente forma:

$$D(s) = \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} = 1 + \frac{1}{T_i s}. \quad (9)$$

En este caso  $s^2 + a_1 s + b_0 KD(s) = \frac{s^3 + a_1 s^2 + b_0 K s + \frac{b_0 K}{T_i}}{s}$  y la condición de estabilidad para el lazo cerrado se puede determinar a partir del criterio de Routh-Hurwitz aplicado al polinomio  $s^3 + a_1 s^2 + b_0 K s + \frac{b_0 K}{T_i}$ . El arreglo de Routh-Hurwitz es el siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & b_0 K \\ s^2 & a_1 & \frac{b_0 K}{T_i} \\ s^1 & \frac{b_0 K}{a_1} \left( a_1 - \frac{1}{T_i} \right) & \\ s^0 & \frac{b_0 K}{T_i} & \end{array}$$

Como  $a_1 = \frac{1}{J} \left( B + \frac{K_m^2}{R} \right) > 0$ ,  $b_0 = \frac{K_m A}{JR} > 0$  y  $K > 0$ , la condición de estabilidad que se desprende del arreglo es:

$$0 < \frac{1}{T_i} < a_1. \quad (10)$$

También se requiere que el error de seguimiento en régimen sea nulo ante señales de referencia  $\theta_r$  en forma de escalón.

Para  $D(s)$  elegido según (9) y asumiendo que se cumple la condición de estabilidad (10), se tiene que ante entradas  $\Theta_r$  en forma de escalón, de amplitud  $\Theta_{r0}$ , el error de seguimiento en régimen es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s(s+a_1)}{s^2 + a_1s + b_0KD(s)} \right) \frac{\Theta_{r0}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s^2(s+a_1)}{s^3 + a_1s^2 + b_0Ks + \frac{b_0K}{T_i}} \right) \frac{\Theta_{r0}}{s} = 0$$

según el teorema del valor final.

## Parte 5

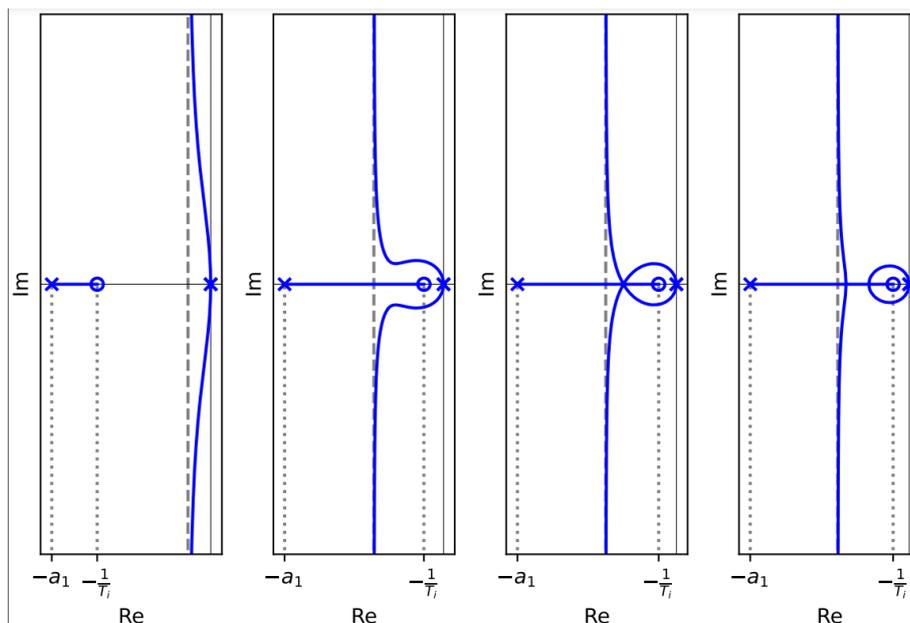
Para que la respuesta transitoria del sistema de entrada  $\theta_r$  y salida  $\theta$  no presente oscilaciones ante un escalón en  $\theta_r$ , se debe cumplir que todos los polos de la función de transferencia de  $\theta_r$  a  $\theta$  sean reales. Según (6) la función de transferencia de  $\theta_r$  a  $\theta$  es:

$$\frac{\Theta}{\Theta_r}(s) = \frac{b_0KD(s)}{s^2 + a_1s + b_0KD(s)} = \frac{b_0K \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}}{s^2 + a_1s + b_0K \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}} = \frac{K \frac{b_0(s + \frac{1}{T_i})}{s^2(s+a_1)}}{1 + K \frac{b_0(s + \frac{1}{T_i})}{s^2(s+a_1)}}. \quad (11)$$

Los polos de (11) son las raíces de

$$s^2(s+a_1) + Kb_0 \left( s + \frac{1}{T_i} \right). \quad (12)$$

El lugar geométrico positivo de las raíces de (12), paramétrico en  $K$  (positivo), varía de la siguiente manera al variar  $-\frac{1}{T_i}$  en el intervalo  $(-a_1, 0)$  impuesto por la condición de estabilidad (10).



El centroide de las dos asíntotas verticales,  $\sigma_c = -\frac{a_1 - \frac{1}{T_i}}{2}$  se mueve a la izquierda en el intervalo  $(-\frac{a_1}{2}, 0)$  a medida que  $-\frac{1}{T_i}$  se mueve hacia la derecha en el intervalo  $(-a_1, 0)$ .

Para  $-\frac{1}{T_i} = -\frac{a_1}{9}$ , el lugar geométrico positivo presenta un punto triple en  $s = -\frac{a_1}{3}$  para  $K = \frac{a_1^2}{3b_0}$ . Esto se puede verificar igualando (12) a  $(s + \alpha)^3$ , desarrollando, e identificando coeficientes:

$$\begin{aligned} s^2(s + a_1) + Kb_0 \left( s + \frac{1}{T_i} \right) &= s^3 + a_1s^2 + Kb_0s + \frac{Kb_0}{T_i} \\ &= (s + \alpha)^3 = s^3 + 3\alpha s^2 + 3\alpha^2 s + \alpha^3. \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{cases} a_1 = 3\alpha \\ Kb_0 = 3\alpha^2 \\ \frac{Kb_0}{T_i} = \alpha^3 \end{cases}$$

resulta

$$\alpha = \frac{a_1}{3}, \quad K = \frac{a_1^2}{3b_0}, \quad T_i = \frac{9}{a_1}.$$

Para todo  $T_i$  tal que  $-\frac{1}{T_i} \in (-\frac{a_1}{9}, 0)$ , existe un intervalo de valores de  $K$  (dependiente de  $T_i$ ) para el cual todas las raíces de (12) son reales. Por esto, si  $T_i > \frac{9}{a_1}$  se puede elegir  $K$  de forma tal que la respuesta transitoria del sistema de entrada  $\theta_r$  y salida  $\theta$  no presente oscilaciones ante un escalón en  $\theta_r$ .

## Parte 6

Dados  $\varepsilon, p > 0$ , ser requiere que el error en régimen sea menor a  $\varepsilon$  ante una referencia  $\theta_r$  en forma de rampa con pendiente  $p$ . Esto se cumple para la elección de  $D(s)$  de la parte 4, porque el sistema realimentado resulta de tipo 2 (con respecto a la señal de referencia). En efecto, recordando (7), se tiene que ante una rampa de pendiente  $p$  en  $\theta_r$  y una perturbación  $T$  nula, el error de seguimiento en régimen es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s(s + a_1)}{s^2 + a_1s + b_0KD(s)} \right) \frac{p}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s^2(s + a_1)}{s^3 + a_1s^2 + b_0Ks + \frac{b_0K}{T_i}} \right) \frac{p}{s^2} = 0$$

según el teorema del valor final, siempre y cuando se cumpla la condición de estabilidad (10).

No hay impedimento alguno en tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Parte 7

Dados  $\varepsilon, A_T, \omega_T > 0$ , se requiere que el error en régimen presente una amplitud menor a  $\varepsilon$  ante una perturbación sinusoidal  $T$ , de amplitud  $A_T$  y frecuencia angular  $\omega_T$ .

Recordando (7), se tiene que ante una perturbación sinusoidal  $T$ , de amplitud  $A_T$  y frecuencia angular  $\omega_T$ , y una entrada de referencia  $\theta_r$  nula, la amplitud del error de seguimiento en régimen sinusoidal es:

$$\left| -\frac{c_0}{s^2 + a_1s + b_0KD(s)} \right|_{s=j\omega_T} A_T, \quad (13)$$

siempre y cuando se cumpla la condición de estabilidad (10).

Acotando (13) por  $\varepsilon$  y sustituyendo la expresión elegida en la parte 4 para  $D(s)$ :

$$\left| -\frac{c_0}{s^2 + a_1s + b_0K \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}} \right|_{s=j\omega_T} A_T < \varepsilon. \quad (14)$$

Claramente, es posible elegir  $K$ , suficientemente grande, tal que se cumpla (14).

El inconveniente de tomar  $K$  demasiado grande es que la señal de control  $u$  puede alcanzar valores que están por fuera del rango admisible para la entrada del driver del motor. Por ejemplo,

recordando (7) y considerando una entrada  $\theta_r$  en forma de escalón unitario y una perturbación  $T$  nula, se tiene que la transformada de Laplace de la señal de control  $u$  es:

$$U(s) = KD(s)E(s) = KD(s) \frac{s(s+a_1)}{s^2 + a_1s + b_0} \frac{1}{s} = K \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \frac{s(s+a_1)}{s^2 + a_1s + b_0} \frac{1}{s}$$

Luego, aplicando el teorema del valor inicial, se concluye que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sK \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \frac{s(s+a_1)}{s^2 + a_1s + b_0} \frac{1}{s} = K.$$

Si  $K$  se elige demasiado grande, ante un escalón en la referencia  $\theta_r$ , la señal de control  $u$  podría exceder el máximo valor tolerable a la entrada del driver del motor.

## Solución problema 2

### Parte 1

#### Bloque sumador:

Por superposición y divisor de tensión:

$$V_+ = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

Luego, por el cortocircuito virtual:

$$\frac{V_s - V_+}{R_2} = \frac{V_+}{R_1} \Rightarrow V_s = V_+(1 + \frac{R_2}{R_1}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{R_2}{R_1})(V_1 + V_2)$$

#### Servo:

$$\theta_s = \frac{K_s}{1 + T_s s} V_s$$

#### Válvula:

$$q_{in} = K_v \theta_s$$

#### Tanque:

$$\frac{dVolumen}{dt} = A\dot{h} = q_{in} - q_{out} \Rightarrow Ash = q_{in} - q_{out} \Rightarrow h = \frac{q_{in}}{As} - \frac{q_{out}}{As}$$

Sustituyendo, llegamos a que:

$$h = \frac{K_v K_s}{2A} (1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{s(1 + T_s s)} (V_1 + V_2) - \frac{q_{out}}{As}$$

Finalmente, las transferencias son:

$$\frac{h}{V_1} = \frac{h}{V_2} = \frac{K_v K_s}{2A} (1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{s(1 + T_s s)} = \frac{1}{8} (1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{s(1 + T_s s)}$$

$$\frac{h}{q_{out}} = -\frac{1}{As} = -\frac{1}{4s}$$

## Parte 2

Por divisor de tensión en los potenciómetros:

$$V_1 = -V_{cc} \frac{h}{h_{max}}, V_2 = V_{cc} \frac{h_{ref}}{h_{max}} \Rightarrow V_1 + V_2 = \frac{V_{cc}}{h_{max}} (h_{ref} - h) = 4(h_{ref} - h)$$

Sustituyendo en la ecuación alcanzada en la parte anterior:

$$h = \frac{K_v K_s V_{cc}}{2A h_{max}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{s(1 + T_s s)} (h_{ref} - h) - \frac{q_{out}}{As} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{2s(1 + T_s s)} (h_{ref} - h) - \frac{q_{out}}{4s}$$

Se puede ver que con los siguientes valores de F(s) y P(s) el diagrama de bloques modela exactamente esa ecuación:

$$F(s) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{2s(1 + T_s s)}, P(s) = \frac{1}{4s}$$

## Parte 3

### Parte a

Se puede verificar que las ramas del lugar geométrico positivo parten de los polos, van hacia el centroide por el eje real y se van hacia el infinito en las direcciones  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Por lo tanto, si el centroide se encuentra en -1, las ramas pasarán por el lugar deseado.

$$c = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{0 - \frac{1}{T_s}}{2} = -\frac{1}{2T_s} = -1 \Rightarrow T_s = \frac{1}{2}$$

### Parte b

En esta parte calculamos la transferencia en lazo cerrado e igualamos el denominador al polinomio de segundo grado que tiene las raíces que queremos  $p(s) = s^2 + 2s + 2$

$$H_{cl}(s) = \frac{k}{2T_s s^2 + 2s + k} = \frac{k}{2T_s} \frac{1}{s^2 + s/T_2 + k/2T_s} = \frac{k}{s^2 + 2s + k} \Rightarrow k = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 2 \Rightarrow R_1 = R_2 = 1k\Omega$$

## Parte 4

La transferencia en lazo abierto es:

$$H_{OL}(s) = \frac{H_{CL}(s)}{1 - H_{CL}(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s} = \frac{2}{s^2 + 2s} \rightarrow H_{OL}(j\omega) = \frac{2}{-\omega^2 + 2j\omega}$$

La frecuencia de ganancia unitaria es:

$$|H_{OL}(j\omega_c)| = \frac{2}{\sqrt{\omega_c^4 + 4\omega_c^2}} = 1 \rightarrow \omega_c^4 + 4\omega_c^2 = 4$$

Definiendo  $x = \omega_c^2$ :

$$x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{8}$$

Como  $x = \omega_c^2 \geq 0$ , tenemos:

$$x = -2 + \sqrt{8} = 0,82343 \Rightarrow \omega_c = 0,91 \text{ rad/s}$$

El argumento a frecuencia unitaria es:

$$\arg(H_{OL}(j\omega_c)) = \arg\left(\frac{2}{-\omega_c^2 + 2j\omega_c}\right) = \arg\left(\frac{-2\omega_c^2 - 4j\omega_c}{\omega_c^4 + 4\omega_c^2}\right) = \arg\left(\frac{-1,656 - j3,64}{3,998}\right)$$

$$\arg(-0,414 - j1,07) = -111,16^\circ$$

Por lo tanto, el margen de fase inicial es:

$$MF_0 = 68,85^\circ$$

## Parte 5

### Parte a

Impedancias equivalentes en paralelo:

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s}, \quad Z_2 = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}$$

Primer etapa:

$$\frac{V_{in}}{Z_1} = \frac{-V_{o1}}{Z_2} \Rightarrow V_{o1} = \frac{-R_2}{R_1} \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + R_2 C_2 s} V_{in}$$

Segunda etapa (inversor de ganancia unitaria):

$$V_o = -V_{o1}$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{R_2(1 + R_1 C_1 s)}{R_1(1 + R_2 C_2 s)}, \quad \text{eligiendo } R_1 = R_2 \rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + R_2 C_2 s} = \frac{1 + T s}{1 + s}$$

Es un compensador por adelanto de fase si:

$$T = R_1 C_1, \quad a = \frac{C_2}{C_1} < 1$$

### Parte b

Dado:

$$\omega_c = 0,91 \text{ rad/s}, \quad MF_0 = 68,85^\circ$$

- 1) Tomamos  $\Delta\Phi = 10^\circ$
- 2) Fase necesaria:

$$\Phi_m = MF - MF_0 + \Delta\Phi = 100^\circ - 68,85^\circ + 10^\circ = 41,15^\circ$$

- 3) Resolviendo:

$$\text{sen}(41,15^\circ) = \frac{1 - a}{1 + a} = 0,658 \Rightarrow a = \frac{0,658 - 1}{-1 - 0,658} = 0,206$$

- 4)  $\sqrt{a} = 0,454$   
Hallamos  $\omega'_c$  tal que:

$$|H_{OL}(j\omega'_c)| = \sqrt{a}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\omega_c'^4 + 4\omega_c'^2}} = 0,454 \Rightarrow 19,4 = \omega_c'^4 + 4\omega_c'^2$$

$$x^2 + 4x - 19,4 = 0 \Rightarrow x = -6,84 \text{ ó } x = 2,837$$

$$\omega'_c = \sqrt{2,837} = 1,68 \text{ rad/s}$$

Luego,

$$T = \frac{1}{\sqrt{a}\omega'_c} = 1,31 \text{ seg}$$

Verificamos MF final:

$$C(s) = \frac{1 + 1,31s}{1 + 0,27s}$$

$$\arg(C(j\omega'_c)) = \arg\left(\frac{1 + 1,31j1,68}{1 + 0,27j1,68}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{1 + j2,25}{1 + j0,453}\right)$$

$$= 41,16^\circ$$

$$\arg(H_{OL}(j\omega'_c)) = \arg\left(\frac{2}{-\omega'^2_c + 2j\omega'_c}\right) = -130,01^\circ$$

$$\arg(C(j\omega'_c)H_{OL}(j\omega'_c)) = -88,84^\circ$$

$$MF = 91,16^\circ \in 100^\circ \pm 10^\circ$$

Verificamos que el margen de fase queda dentro del rango deseado.