

Ejercicio 1 (Recta tangente) 1. Indicar los valores de m y n de la recta $y = mx + n$ tangente a la función f en el punto $P = (a, f(a))$ (asumiendo que existe).

Solución:

De la ecuación de la recta tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ deducimos que $m = f'(a)$ y $n = -af'(a) + f(a)$

2. Calcular la pendiente m de la recta tangente para las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = 3x + 4$ en $(1, 7)$.

Solución: $m = 3$ y $n = 4$

c) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ en $(-1, 0)$.

Solución: $m = 4$ y $n = -3$

b) $f(x) = 4x^2 - 3x$ en $(-1, 7)$.

Solución: $m = -11$ y $n = -4$

d) $f(x) = \frac{6}{x+1}$ en $(2, 2)$.

Solución: $m = -2/3$ y $n = 10/3$

Ejercicio 2 (Derivada en un valor) Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones en el número dado:

1. $f(x) = 1 - 3x^2$ en 2.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-3x^2+11}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} -3(x+2) = -12$$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en 4.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x-4} = -\frac{1}{16}$$

2. $f(x) = 2 - 3x + x^2$ en -1.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-3x+x^2-6}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 4 = -5$$

4. $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ en 4.

Solución: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+2\sqrt{x}-5}{x-4} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 3 (Función derivada) Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + ax^{n-2} - a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

2. $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a^n - x^n}{x^n a^n}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x^{n-1} + ax^{n-2} - a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})}{x^n a^n} = \frac{na^{n-1}}{a^{2n}} = \frac{n}{a^{2n-n+1}}$$

4. $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{a}{a+1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x-a}{(x+1)(a+1)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x+1)(a+1)} = \frac{1}{(a+1)^2}$$

Ejercicio 4 Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de 58m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 58t - 0,83t^2$.

1. Hallar la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.

Solución:

La deriva de $H(t)$ es igual a $H'(t) = 58 - 1,66t$ por lo que $H'(1) = 56,34$

2. ¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?

Solución:

La flecha regresa a la luna cuando $H(t) = 0$ es decir cuando $58 - 0,83t = 0$, o después de $t = \frac{58}{0,83} \approx 69,87$ segundos.

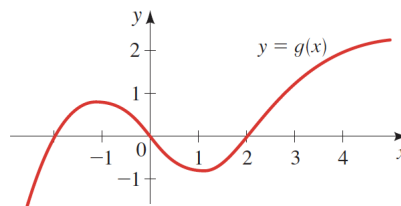
3. ¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?

Solución

La velocidad será también de 58m/s (Más allá de las cuentas: ¿por qué?)

Ejercicio 5 (Estimación gráfica de derivadas) Para la función g cuya gráfica es la que se muestra a continuación, ordenar los siguientes valores en orden creciente justificando la respuesta.

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(1) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



Solución:

$$g'(0) < 0 = g'(1) < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$$

Ejercicio 6 (Existencia derivada) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

Solución:

La función $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ es derivable para todo $x \neq 0$. Solo resta ver lo que pasa en $x = 0$:

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$ concluimos que no existe la derivada de f en $x = 0$.

Observación: en lo que sigue se aceptan como conocidas las siguientes derivadas:

- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\cos(x)' = -\text{sen}(x)$
- $\text{sen}(x)' = \cos(x)$

Ejercicio 7 (Operaciones y derivada) Recordar las siguientes propiedades de la derivada (en caso de que exista):

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g^2(x)}(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))$

1. **Derivada de una combinación lineal** Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{27} - 15x^{10} + 7x^3 - 3.$

Solución:

$$f'(x) = 27x^{26} - 150x^9 + 21x^2$$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^3}.$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^2} + \frac{18}{x^4}$$

2. **Derivada del producto** Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 e^x.$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$$

c) $f(x) = \text{sen}(x) \cos(x).$

Solución:

$$f'(x) = -\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)$$

b) $f(x) = x \ln(x) - x.$

Solución:

$$f'(x) = \ln(x)$$

d) $f(x) = \text{sen}^3(x).$

Solución:

$$f'(x) = 3 \text{sen}^2(x) \cos(x)$$

3. **Derivada del cociente** Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$

Solución:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 4\frac{1}{x^3} - 27\frac{1}{x^4}$$

c) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}.$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^4+x^2+1) - (x^2+3x+2)(4x^3+x^2+1)}{(x^4+x^2+1)^2}$$

b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$

Solución:

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

d) $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x}}.$

Solución:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\sqrt{x} - \text{sen}(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

Ejercicio 8 (Derivada de la composición - regla de la cadena) Se consideran las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 5$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x$.

1. Hallar $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $G : G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Solución:

$$F(x) = f(g(x)) = f(e^x) = e^{2x} + 5$$

$$G(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 5) = e^{x^2+5}$$

2. Calcular $F'(x)$ y $G'(x) \forall x \in \mathbb{R}$ usando la regla de la cadena y compruebe el resultado obtenido derivando directamente

Solución:

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(e^x)(e^x)' = 2e^x e^x = 2e^{2x}$$

$$G'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(x^2 + 5)2x = e^{x^2+5}2x$$

Ejercicio 9 (Operaciones y derivada) Hallar f' en función de g y g' para los siguientes ejemplos:

1. $f(x) = g(x) + (x - a)$

Solución:

$$f'(x) = g'(x) + 1$$

2. $f(x) = g(x)(x - a)$

Solución:

$$f'(x) = g'(x)(x - a) + g(x)$$

3. $f(x) = g(a)(x - a)$

Solución:

$$f'(x) = g'(a)$$

4. $f(x) = g(x + g(a))$

Solución:

$$f'(x) = g'(x + g(a))$$

5. $f(x) = g(xg(a))$

Solución:

$$f'(x) = g'(xg(a))g(a)$$

6. $f(x) = g(x + g(x))$

Solución:

$$f'(x) = g'(x + g(x))(1 + g'(x))$$

7. $f(x + 3) = g(x^3)$

Solución:

$$f'(x) = g'((x - 3)^3)3(x - 3)^2$$

8. $f(x^3) = g(x + g(x))$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{3}g'(x^{1/3} + g(x^{1/3}))(1 + g'(x^{1/3}))x^{-2/3}$$

Ejercicio 10 (Regla de la cadena) 1. Sean $f : f(x) = \ln(x)$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(1) = 6$ y $g'(1) = 2$. Halle usando la regla de la cadena la derivada de $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ en $x = 1$.

Solución:

$$F'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(6) \times 2 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$$

2. Sean $f : f(x) = e^{3x}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(2) = 0$ y $g'(2) = 4$. Halle usando la regla de la cadena la derivada de $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ en $x = 2$.

Solución:

$$F'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(0) \times 4 = 3 \times 4 = 12.$$

Ejercicio 11 (Regla de la cadena) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} e^{\frac{1}{x^2+1}}$$

2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+2})$

Solución:

$$f'(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

3. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$

Solución:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \frac{-\text{sen}(x)x + \cos(x)}{x^2}$$

4. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución:

$$f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}$$

Ejercicio 12 (Derivada y crecimiento) Las funciones de la figura 2 son las derivadas de las funciones de la figura 1 en desorden. Indicar cuál es la derivada correspondiente de cada función.

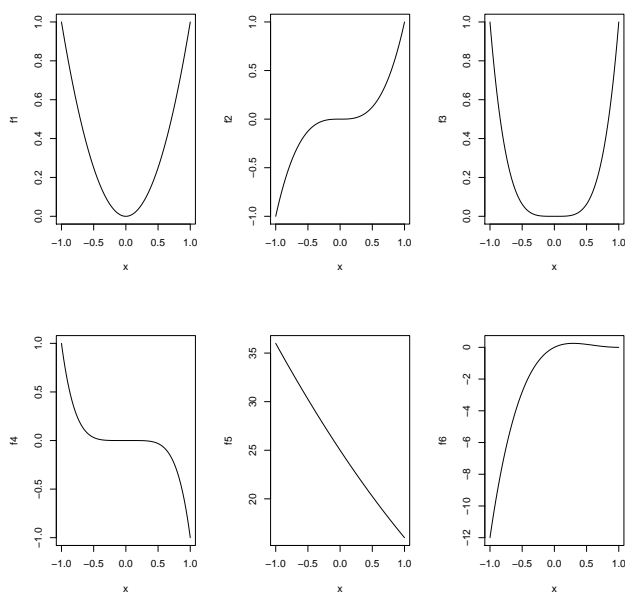


Figura 1: Funciones.

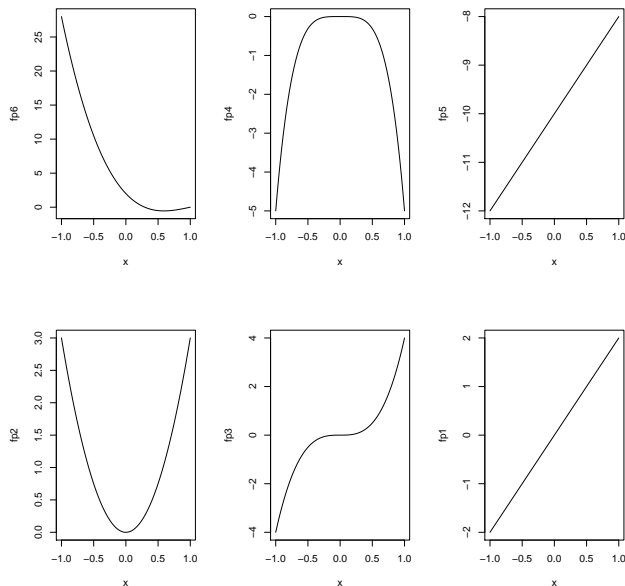


Figura 2: Derivadas.

Solución

Figura 1	1	2	3	4	5	6
Figura 2	6	4	5	2	3	1

Ejercicio 13 (Identificación gráfica de extremos) Usando la gráfica de la función, determinar:

1. los valores críticos;
2. los extremos absolutos y relativos y donde se alcanzan.

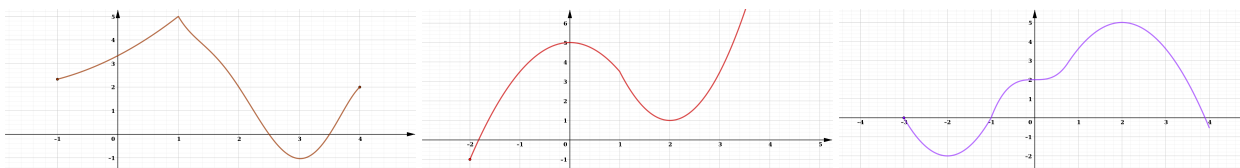


Figura 3: Identificación gráfica de extremos

Solución:

- a) El punto crítico (donde la derivada se anula) de la gráfica de la izquierda es $x = 3$.
 Los extremos absolutos se presentan en $x = 1$ y en $x = 3$. Los extremos relativos se presentan en $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y en $x = 4$.
- b) Los puntos críticos (donde la derivada se anula) de la gráfica del medio son $x = 0$ y $x = 2$.
 Los extremos absolutos se presentan en $x = -3$ y en $x = 3,5$. Los extremos relativos se presentan en $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3,5$.
- c) Los puntos críticos (donde la derivada se anula) de la gráfica de la derecha son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.
 Los extremos absolutos se presentan en $x = -2$ y en $x = 2$. Los extremos relativos se presentan en $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 4$.

Ejercicio 14 (Crecimiento y extremos) Dada la gráfica de una cierta función que se muestra a continuación, estimar:

1. los intervalos de crecimiento y decrecimiento,
2. donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos,
3. puntos de cortes con los ejes,
4. dominio de la función.

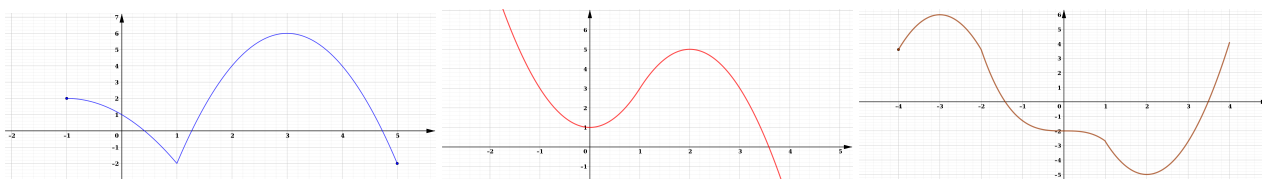


Figura 4: Crecimiento y extremos

- a) La función es creciente en $[1, 3]$ y decreciente en $[-1, 1] \cup [3, 5]$. Los máximos y mínimos absolutos (y relativos) se presentan en $x = 1$ y en $x = 3$ (no son absolutos), también se presentan extremos relativos en $x = -1$ y $x = 5$. Los puntos de corte con el eje ($0x$) se dan en $x = 0,5$, $x = 1,25$ y $x = 4,75$ aproximadamente y el punto de corte con el eje ($0y$) se da en $y = 1$. El dominio de la función es $[-1, 5]$.
- b) La función es creciente en $[0, 2]$ y decreciente en $[-\infty, 0] \cup [2, +\infty]$. Los máximos y mínimos relativos se presentan en $x = 0$ y en $x = 2$. El punto de corte con el eje ($0x$) en $x = 3,5$ aproximadamente y el punto de corte con el eje ($0y$) en $y = 1$. El dominio de la función es \mathbb{R} .
- c) La función es creciente en $[-4, -3] \cup [2, 4]$ y decreciente en $[-3, 2]$. Los máximos y mínimos relativos se presentan en $x = -3$ (máximo absoluto), en $x = 2$ (mínimo absoluto) y en $x = -4$. Los puntos de corte con el eje ($0x$) en $x = -1,5$ y en $x = 3,5$ aproximadamente y el punto de corte con el eje ($0y$) en $y = -2$. El dominio de la función es $[-4, 4]$.