SyC - Hoja 10 - Ej. 4

4. Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_k - 3x_{k-1} + 2x_{k-2} = e_k$$

donde

$$e_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } 1, \\ 0 & \text{si } k > 1, \end{cases}$$

con condiciones iniciales x_{-1} y x_{-2} conocidas.

Posible contexto: Esta ecuación en diferencias podría ser el resultado de modelar un sistema de tiempo discrteto de entrada e_k y salida x_k.

Revisión de la propiedad de retraso

Tenemos que resolver la ecuación en diferencias

$$x_k - 3x_{k-1} + 2x_{k-2} = e_k, \quad \text{para } k \geq 0,$$

donde

$$e_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } 1, \\ 0 & \text{si } k > 1, \end{cases}$$

con condiciones iniciales x_{-1} y x_{-2} conocidas.

Aplicando transformada Z a ambos miembros de la equación, reducimos la resolución de la ecuación en diferencias a un problema algebraico, pero antes, debemos revisar la propiedad de retraso ...

La propiedad de retraso vista en teórico:

$$\mathcal{Z}\left[\{y_{k-n}\}\right] = z^{-n} Y(z), \quad \text{donde } n \geq 0 \text{ y } Y(z) = \mathcal{Z}\left[\{y_k\}\right]$$

es válida solamente para sucesiones $\{y_k\}$ *causales*, es decir, tales que: $y_k = 0$, para $k < 0$. La suceción $\{x_k\}$ de este ejercicio en general no es causal, ya que es posible que $x_{-1} \neq 0$ o $x_{-2} \neq 0$.

Propiedad de retraso para sucesiones no causales

Sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión cualquiera (causal o no) y $n \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{Z}\left[\{y_{k-n}\}\right] = z^{-n}\left(\sum_{k=-n}^{-1} y_k z^{-k} + Y(z)\right)$$

Dem.:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\{y_{k-n}\}\right] &= \sum_{i=0}^{\infty} y_{i-n} z^{-i} = \sum_{j=-n}^{\infty} y_j z^{-j-n} = z^{-n}\left(\sum_{j=-n}^{\infty} y_j z^{-j}\right) \\
&= z^{-n}\left(\sum_{j=-n}^{-1} y_j z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j}\right) \\
&= z^{-n}\left(\sum_{j=-n}^{-1} y_j z^{-j} + Y(z)\right)
\end{aligned}$$

Retraso y adelanto (comparación)

Sea $\{y_k\}$ una sucesión cualquiera (causal o no) y $n \geq 0$, entonces:

- Retraso

$$\mathcal{Z}\left[\{y_{k-n}\}\right] = z^{-n}\left(Y(z) + \sum_{j=-n}^{-1} y_j z^{-j}\right)$$

- Adelanto

$$\mathcal{Z}\left[\{y_{k+n}\}\right] = z^{n}\left(Y(z) - \sum_{j=0}^{n-1} y_j z^{-j}\right)$$

Resolución de la ecuación en diferencias

$$x_k - 3x_{k-1} + 2x_{k-2} = e_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

donde

$$e_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } 1, \\ 0 & \text{si } k > 1, \end{cases}$$

con condiciones iniciales x_{-1} y x_{-2} conocidas.

Aplicando transformada Z unilateral a ambos miembros de la ecuación en diferencias:

$$X(z) - 3z^{-1}\left(x_{-1}z + X(z)\right) + 2z^{-2}\left(x_{-2}z^2 + x_{-1}z + X(z)\right) = 1 + z^{-1}$$

Operando:

$$\left(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right) X(z) = 3x_{-1} - 2x_{-2} - 2x_{-1}z^{-1} + 1 + z^{-1}$$

$$\left(z^2 - 3z + 2\right) X(z) = \left(3x_{-1} - 2x_{-2}\right) z^2 - 2x_{-1}z + z^2 + z$$

$$(z-1)(z-2) X(z) = \left(3x_{-1} - 2x_{-2}\right) z^2 - 2x_{-1}z + z^2 + z$$

Resolución de la ecuación en diferencias

Despejando $X(z)$:

$$X(z) = \frac{(3x_{-1} - 2x_{-2})\, z^2 - 2x_{-1} z + z^2 + z}{(z-1)(z-2)}$$

Expandiendo $\frac{X(z)}{z}$ en fracciones simples:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(3x_{-1} - 2x_{-2})\, z - 2x_{-1} + z + 1}{(z-1)(z-2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2x_{-2} - x_{-1} - 2}{z-1} + \frac{4x_{-1} - 4x_{-2} + 3}{z-2}$$

$$X(z) = (2x_{-2} - x_{-1} - 2)\, \frac{z}{z-1} + (4x_{-1} - 4x_{-2} + 3)\, \frac{z}{z-2}$$

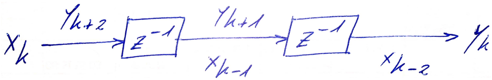
$$x_k = (2x_{-2} - x_{-1} - 2)\, \mathbb{1}_k + (4x_{-1} - 4x_{-2} + 3)\, 2^k$$

$$\boxed{x_k = \underbrace{\left(2x_{-2} - x_{-1} + 4(x_{-1} - x_{-2})\, 2^k\right) \mathbb{1}_k}_{\text{Respuesta natural}} + \underbrace{\left(-2 + 3 \cdot 2^k\right) \mathbb{1}_k}_{\text{Respuesta forzada}}}$$

Resolución de la ecuación en diferencias (otra forma)

$$x_k - 3x_{k-1} + 2x_{k-2} = e_k, \quad k \geq 0$$

Sea $y_k = x_{k-2}$:



Entonces:

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = e_k, \quad k \geq 0$$

Ahora, al transformar, podemos utilizar la propiedad del adelanto:

$$z^2 \left(Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} \right) - 3z \left(Y(z) - y_0 \right) + 2Y(z) = 1 + z^{-1}$$

$$\left(z^2 - 3z + 2 \right) Y(z) + \left(-z^2 + 3z \right) y_0 - zy_1 = 1 + z^{-1}$$

$$Y(z) = \frac{\left(z^2 - 3z \right) y_0 + zy_1 + 1 + z^{-1}}{z^2 - 3z + 2}$$

Resolución de la ecuación en diferencias (otra forma)

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\left(z^2-3z\right)y_0 + zy_1 + 1 + z^{-1}}{z^2-3z+2} \\ &= \underbrace{\frac{y_0z^2 + (y_1-3y_0)\,z}{(z-1)\,(z-2)}}_{*} + z^{-2}\underbrace{\frac{z^2+z}{(z-1)\,(z-2)}}_{**} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{*}{z} &= \frac{2y_0-y_1}{z-1} + \frac{y_1-y_0}{z-2} \\ \frac{**}{z} &= \frac{z+1}{(z-1)\,(z-2)} = -\frac{2}{z-1} + \frac{3}{z-2} \end{aligned}$$

$$Y(z) = (2y_0-y_1)\,\frac{z}{z-1} + (y_1-y_0)\,\frac{z}{z-2} + z^{-2}\left(-2\frac{z}{z-1} + 3\frac{z}{z-2}\right)$$

$$y_k = \left(2y_0 - y_1 + (y_1-y_0)\,2^k\right)\mathbb{1}_k + \left(-2 + 3\cdot 2^{k-2}\right)\mathbb{1}_{k-2}, \quad k \geq 0$$

Resolución de la ecuación en diferencias (otra forma)

$$y_k = \left(2y_0 - y_1 + (y_1 - y_0)\,2^k\right)\mathbb{1}_k + \left(-2 + 3\cdot 2^{k-2}\right)\mathbb{1}_{k-2}, \quad k \geq 0$$

Pero $y_k = x_{k-2}$, entonces:

$$\begin{aligned} x_{k-2} &= \left(2y_0 - y_1 + (y_1 - y_0)\,2^k\right)\mathbb{1}_k + \left(-2 + 3\cdot 2^{k-2}\right)\mathbb{1}_{k-2} \\ &= \left(2y_0 - y_1 + 4\,(y_1 - y_0)\,2^{k-2}\right)\mathbb{1}_k + \left(-2 + 3\cdot 2^{k-2}\right)\mathbb{1}_{k-2},\ k \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$x_k = \left(2y_0 - y_1 + 4\,(y_1 - y_0)\,2^k\right)\mathbb{1}_{k+2} + \left(-2 + 3\cdot 2^k\right)\mathbb{1}_k, \quad k \geq 0$$

$$x_k = \left(2y_0 - y_1 + 4\,(y_1 - y_0)\,2^k\right)\mathbb{1}_k + \left(-2 + 3\cdot 2^k\right)\mathbb{1}_k, \quad k \geq 0$$

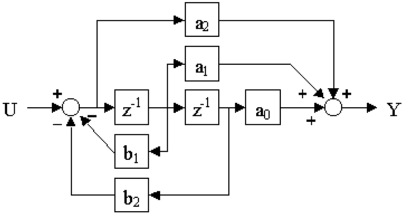
$$\boxed{x_k = \underbrace{\left(2x_{-2} - x_{-1} + 4\,(x_{-1} - x_{-2})\,2^k\right)\mathbb{1}_k}_{\text{Respuesta natural}} + \underbrace{\left(-2 + 3\cdot 2^k\right)\mathbb{1}_k}_{\text{Respuesta forzada}}}$$

SyC - Hoja 10 - Ej. 5

5) El diagrama de bloques representa un filtro discreto de segundo orden descrito por la función de transferencia:

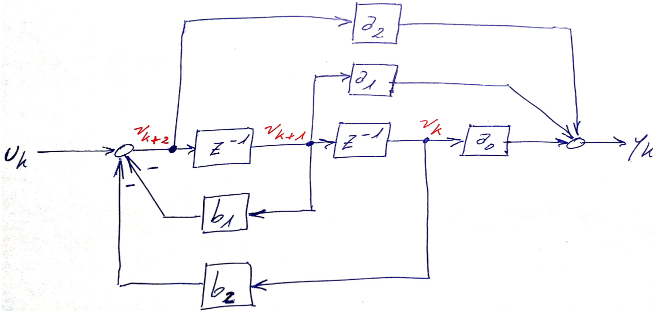
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 - 1{,}96.z + 0{,}99}{z^2 - 1{,}98.z + 0{,}99}$$

Determine $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$.



SyC - Hoja 10 - Ej. 5

Sea v_k como se indica en el siguiente diagrama de bloques:



$$\begin{cases} v_{k+2} = u_k - b_1 v_{k+1} - b_2 v_k \\ y_k = a_2 v_{k+2} + a_1 v_{k+1} + a_0 v_k \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \begin{cases} z^2 V(z) = U(z) - b_1 z V(z) - b_2 V(z) \\ Y(z) = a_2 z^2 V(z) + a_1 z V(z) + a_0 V(z) \end{cases}$$

SyC - Hoja 10 - Ej. 5

$$\begin{cases} v_{k+2} = u_k - b_1 v_{k+1} - b_2 v_k \\ y_k = a_2 v_{k+2} + a_1 v_{k+1} + a_0 v_k \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \begin{cases} z^2 V(z) = U(z) - b_1 z V(z) - b_2 V(z) \\ Y(z) = a_2 z^2 V(z) + a_1 z V(z) + a_0 V(z) \end{cases}$$

Operando y despejando $V(z)$ de la primera ecuación:

$$\begin{cases} V(z) = \frac{1}{z^2 + b_1 z + b_2} U(z) \\ Y(z) = \left(a_2 z^2 + a_1 z + a_0\right) V(z) \end{cases}$$

Eliminando $V(z)$:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_2}$$

Identificando coeficientes:

$$a_2 = 1; \quad a_1 = -1{,}96; \quad a_0 = 0{,}99; \quad b_1 = -1{,}98; \quad b_2 = 0{,}99$$

SyC - Hoja 10 - Ej. 5

Ecuación en diferencias

La función

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_2}$$

es la función de transferencia de un sistema descripto por la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{k+2} + b_1 y_{k+1} + b_2 y_k = a_2 u_{k+2} + a_1 u_{k+1} + a_0 u_k,$$

o también,

$$y_k = -b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2} + a_2 u_k + a_1 u_{k-1} + a_0 u_{k-2},$$

en la que aparecen retardos no solo de la salida, sino también de la entrada.

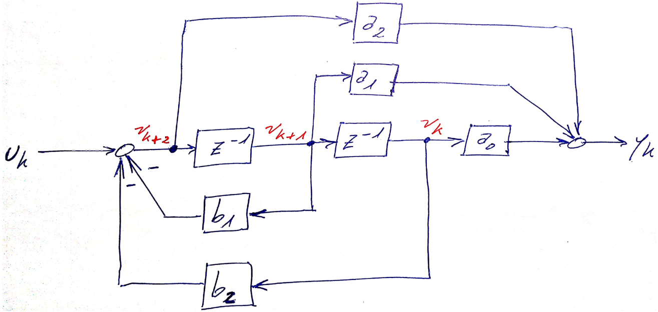
SyC - Hoja 10 - Ej. 5

Diagrama de bloques a partir de la función de transferencia

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_2}$$

Sea $V(z)$ tal que

$$V(z) = \frac{1}{z^2 + b_1 z + b_2} U(z) \quad \Longrightarrow \quad v_{k+2} = u_k - b_1 v_{k+1} - b_2 v_k$$

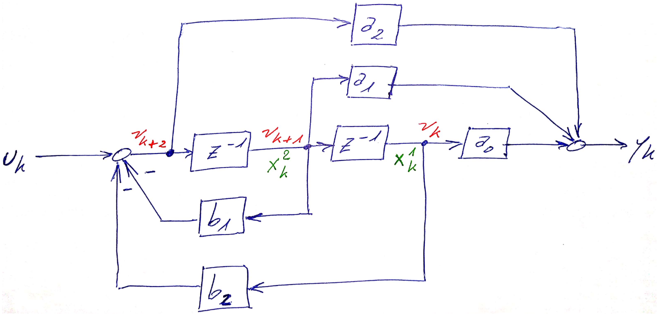


$$Y(z) = \left(a_2 z^2 + a_1 z + a_0\right) V(z) \quad \Longrightarrow \quad y_k = a_2 v_{k+2} + a_1 v_{k+1} + a_0 v_k$$

SyC - Hoja 10 - Ej. 5

Representación en variables de estado

Sean $x_k^1 = v_k$ y $x_k^2 = v_{k+1}$:



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} a_0 - a_2 b_2 & a_1 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix} u_k \end{cases}$$