Soluciones Práctico 7: Composición e Inversa de funciones

Ejercicio 1 (Composición de funciones) *Para los siguientes pares de funciones definidas en $\mathbb{R}$ calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.*

1. a) $f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = x^3 - x^2 - 4$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^3 - (2x+1)^2 - 4 = 8x^3 + 8x^2 + 2x - 4$.
   - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^3 - x^2 - 4) + 1 = 2x^3 - 2x^2 - 7$.

   b) $f(x) = x^2 + x + 4, \qquad g(x) = \cos(x)$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = \cos(x^2 + x + 4)$.
   - $(f \circ g)(x) = \cos^2(x) + \cos(x) + 4$.

   c) $f(x) = x^3, \qquad g(x) = \frac{x}{x^4+5}$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = \frac{x^3}{x^{12}+5}$.
   - $(f \circ g)(x) = \left(\frac{x}{x^4+5}\right)^3$.

2. a) $f(x) = |x+1|, \qquad g(x) = |2x|$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = 2|x+1|$
   - $(f \circ g)(x) = |2x| + 1$

   b) $f(x) = x + 1, \qquad g(x) = \max\{1, x-1\}$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 1 \\ x & si\ x \geq 1 \end{cases}$
   - $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 2 \\ x & si\ x \geq 2 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \leq 0 \\ x-8 & 0 < x \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 6x^2+2 & x \leq 0 \\ x-8 & 0 < x \leq 8 \\ 2x-16 & x > 8 \end{cases}$
   - $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \leq 0 \\ 2x-8 & 0 < x \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} -1 & si & x \leq 0 \\ 0 & si & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x^2 & si & x < 2 \\ x+2 & si & x > 2 \end{cases}$

   Solución:

   - $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$
   - $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 2 (Composición de funciones y dominio) *Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.*

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x + 1$.

   Solución:

   - $g \circ f$ *está bien definida y está dada por* $(g \circ f)(x) = 2\frac{x}{x^2-9} + 1 = \frac{x^2+2x-9}{x^2-9}$
   - $f \circ g$ *no está bien definida ya que* 3 *y* -3 *pertenecen a la imagen de* g.
     Por lo que si modificamos el dominio de g *a* $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ *queda bien definida y está dada por* $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{(2x+1)^2-9} = \frac{2x+1}{4x^2+4x-8}$

2. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \log(x)$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x - 1$.

   Solución:

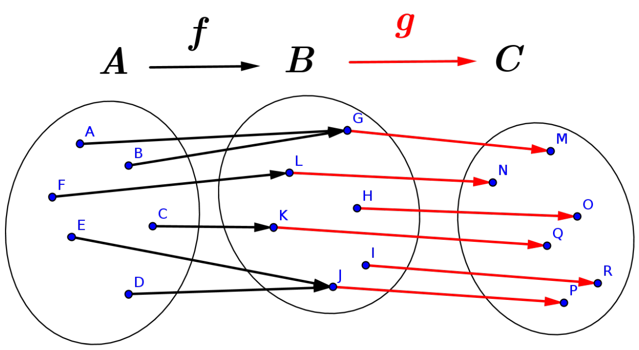
   - $g \circ f$ *está bien definida y está dada por* $(g \circ f)(x) = 2\log(x) - 1$
   - $f \circ g$ *no está bien definida ya que* $(-\infty, 0]$ *está incluida en la imagen de* g.
     Por lo que si modificamos el dominio de g *a* $(1/2, +\infty)$ *queda bien definida y está dada por* $(f \circ g)(x) = \log(2x - 1)$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x|$ *y* $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

   Solución:

   - $g \circ f$ *no está bien definida ya que* $[0, 1)$ *está incluida en la imagen de* f.
     Por lo que si modificamos el dominio de f *a* $(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$ *está bien definida y está dada por* $(g \circ f)(x) = \sqrt{|x|^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$.
   - $f \circ g$ *está bien definida y está dada por* $(f \circ g)(x) = \left|\sqrt{x^2 - 1}\right| = \sqrt{x^2 - 1}$.

Ejercicio 3 (Composición y biyectividad) *Sean* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *funciones dadas por el siguiente diagrama*



1. *Calcular* $g \circ f$

   Solución:

   $g \circ f$ *está dada por:*

$$(g \circ f)(A) = M; (g \circ f)(B) = M; (g \circ f)(C) = Q; (g \circ f)(D) = P; (g \circ f)(F) = N.$$

2. *Para las funciones f, g y $g \circ f$, determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.*

   Solución:

   La función f no es inyectiva ($f(A) = f(B) = G$) y no es sobreyectiva pues H (por ejemplo) no tiene preimagen.

   La función g es biyectiva.

   La gunción $g \circ f$ no es sobreyectiva (por ejemplo R no tiene preimagen), ni inyectiva ($(g \circ f)(A) = (g \circ f)(B) = M$).

Ejercicio 4 (Dominio, codominio y biyectividad) *Consideremos las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $i(x) = x^2$.

a) *¿Son todas las funciones iguales? Justifique.*

   Solución: *No hay dos funciones iguales. Para que las funciones sean iguales, entre otras cosas, deben coincidir los dominios y codominios. En este caso, la “asociación” es siempre la misma: $x \rightsquigarrow x^2$, pero no hay dos funciones que coincidan en dominio y codominio.*

b) *Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.*

   Solución: *La primera función (f) no es inyectiva (por ejemplo x=1 y x=-1 tienen la misma imagen) ni sobreyectiva (por ejemplo y=-2 no tiene preimagen).*

   La segunda función (g) no es inyectiva pero sí sobreyectiva. En este codominio reducido (con respecto a la anterior) todos los elementos tiene preimágenes, es decir, una raíz cuadrada.

   *La tercer función (h) es inyectiva (dos números **postivos** diferentes tienen cuadrados diferentes) pero no sobreyectiva (por ejemplo y=-2 no tiene preimagen).*

   La cuarta función (i) es biyectiva (es decir, inyectiva y sobreyectiva). El argumento de inyectividad es el mismo que el de h (tienen el mismo dominio) y el argumento para la sobreyectividad es el mismo que para g.

Ejercicio 5 (Dominio, codominio y biyectividad) *Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 5$
2. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 5$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$
5. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$
6. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

Solución:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{2\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva. Además para cualquier $x \in \mathbb{Z}$, $x - 5$ también es un entero y $x = f(x - 5)$. Por lo tanto es sobreyectiva.*

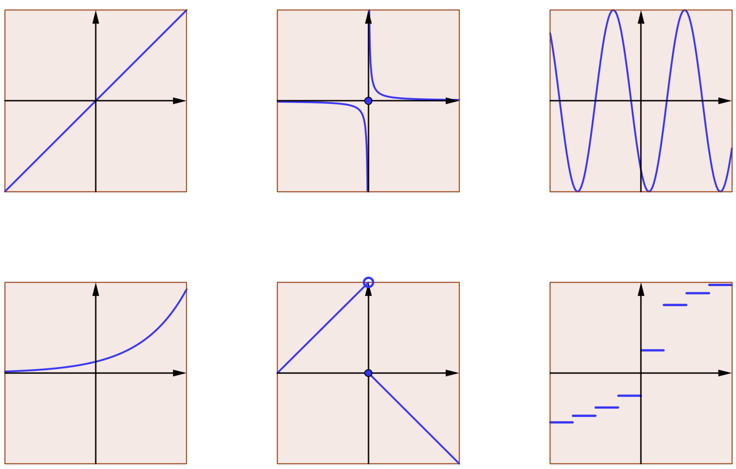
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva y sobreyectiva.*

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{9\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

5. *$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 2x$ es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{9\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

6. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$ es inyectiva. Además para cualqueir $x \in \mathbb{R}$, $x/2$ también es un real y $x = f(x/2)$. Por lo tanto es sobreyectiva.*

Ejercicio 6 (Biyectividad - Interpretación gráfica) *Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*



Solución: *Tomamos las seis funciones como definidas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y es según esto que discutimos la inyectividad y la sobreyectividad.*

- *Arriba a la izquierda: Biyectiva*
- *Arriba al centro: Biyectiva*
- *Arriba a la derecha: No es inyectiva. Además la imagen es un intervalo acotado, por lo tanto tampoco es sobreyectiva en $\mathbb{R}$.*
- *Abajo a la izquierda: Es inyectiva pero no sobreyectiva.*
- *Abajo al centro: Habría que ver como sigue la función hacia la izquierda, pero en el intervalo donde está representada, la función es biyectiva.*
- *Abajo a la derecha: Ni inyectiva ni sobreyectiva.*

Ejercicio 7 (Inyectividad/ Sobreyectividad y Composición) *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones.*

1. *Pruebe que si f y g son inyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*

   Solución:

   Supongamos que f y g son inyectivas. Queremos demostrar que $g \circ f$ es inyectiva, es decir, queremos demostrar que para todos los $x, x' \in X$, si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ entonces $x = x'$.

   Para ello, dados $x, x' \in X$ cualesquiera, supongamos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Tenemos que $g(f(x)) = g(f(x'))$ por defnición de $g \circ f$.

   Como g es inyectiva, se deduce que $f(x) = f(x')$. Y como f es inyectiva, se concluye que $x = x'$.

2. *Pruebe que si f y g son sobreyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*

   Solución:

   Supongamos que f y g son sobreyectivas. Queremos demostrar que $g \circ f$ es sobreyectiva, es decir, queremos demostrar que para todo $z \in Z$, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$.

   Para ello, consideremos $z \in Z$ cualquiera.

   Como g es sobreyectiva, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Y como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Se concluye que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

3. a) *Enuncie el recíproco de 1.*

   Solución:

   El reciproco de 1 es "Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f y g lo son".

   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*

   Solución:

   El recíproco de 1 es falso, ya que si tomamos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$, se tiene que $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(g \circ f)(x) = (e^x)^2$ es inyectiva, mientras que g no lo es.

   Sin embargo, se puede demostrar que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
   Prueba: Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Queremos demostrar que f es inyectiva, es decir: queremos demostrar que para todos $x, x' \in X$, si $f(x) = f(x')$, entonces $x = x'$. Para ello, dados $x, x' \in X$ cualesquiera, supongamos que $f(x) = f(x')$. Aplicando g en ambos lados, obtenemos que $g(f(x)) = g(f(x'))$, es decir: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Y como $g \circ f$ es inyectiva, se concluye que $x = x'$.

4. a) *Enuncie el recíproco de 2.*

   Solución:

   El reciproco de 2 es "Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f y g lo son".

   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*

   Solución:

   El recíproco de 2 es falso, ya que si tomamos $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definidas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = (x-1)^2$, se tiene que $g \circ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $(g \circ f)(x) = (x+1-1)^2 = x^2$ es sobreyectiva, mientras que f no lo es.

   Sin embargo, se puede demostrar que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g tambien lo es.
   Prueba: Supongamos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Queremos demostrar que g es sobreyectiva, es decir: queremos demostrar que para todo $z \in Z$, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Para ello, consideremos $z \in Z$ cualquiera. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Tomemos $y := f(x) \in Y$. Se concluye que $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$.

Ejercicio 8 (Inyectividad y crecimiento) *¿Verdadero o falso?*

1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces f es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).*

   Solución: *Verdadero.*
   Probémoslo para f decreciente, para f creciente la prueba es análoga: Si $x \neq y$ entonces se da $x < y$ o $x > y$. En el primer caso, como f es estrictamente decreciente se tiene $f(x) > f(y)$, si es el segundo caso entonces por la misma razón se tiene $f(x) < f(y)$. En cualquiera de los casos $f(x) \neq f(y)$ cuando $x \neq y$ y esto es la definición de función inyectiva.

2. *Si f es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?*

   Solución: *Falso.*
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -x$ *es estrictamente decreciente e inyectiva.*

3. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$ es biyectiva.*

   Solución: *Verdadero.*
   Por la parte 1 alcanza verificar que f es estrictamente creciente. Si $x < y$, entonces $x^3 < y^3$ y por lo tanto $x^3 + x < y^3 + y$.

Ejercicio 9 (Verificar inversa) *Verificar que los pares de funciones dadas corresponden a una función y su inversa. Salvo que se indique lo contrario el dominio es el más grande posible.*

1. $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{x+1}{2} \end{cases}$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

   $(g \circ f)(x) = \frac{2x-1+1}{2} = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{cases} f(x) = x^{1/3} \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = (x^3)^{1/3} = x^{3/3} = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

   $(g \circ f)(x) = (x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{cases} f(x) = \log_2(x+1) & \textit{con dominio } (0, \infty) \\ g(x) = 2^x - 1 & \textit{con dominio } \mathbb{R} \end{cases}$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = \log_2((2^x - 1) + 1) = \log_2(2^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

   $(g \circ f)(x) = 2^{\log_2(x+1)} - 1 = x + 1 - 1 = x, \forall x \in (0, \infty).$

4. $\begin{cases} f(x) = 2 + e^{x-1} & \textit{con dominio } \mathbb{R} \\ g(x) = \ln(x-2) + 1 & \textit{con dominio } (2, \infty) \end{cases}$

   Solución:

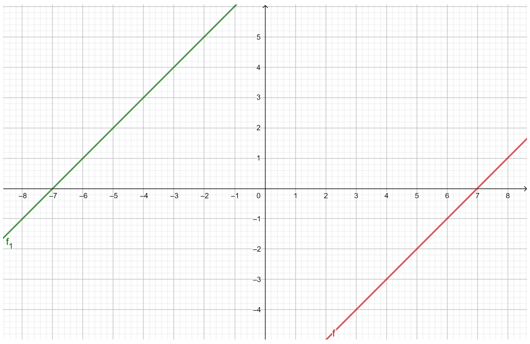
   $(f \circ g)(x) = 2 + e^{\ln(x-2)+1-1} = 2 + x - 2 = x, \forall x \in (2, +\infty)$

   $(g \circ f)(x) = \ln(2 + e^{x-1} - 2) + 1 = \ln(e^{x-1}) + 1 = x - 1 + 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 10 (Cálculo de función inversa) *Verificar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa. Graficar f^{-1}. Utilizar GeoGebra.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x + 7$.

   Solución*:*
   Tenemos que f es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva. Además dado un número $y \in \mathbb{R}$ si tomamos $x = y - 7$ tenemos que $f(x) = f(y-7) = (y-7) + 7 = y$. Esto nos dice que f es sobreyectiva. También nos sugiere la inversa: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f^{-1}(y) = y - 7$.



f_1 y f_1^{-1}, ambas con variable x.

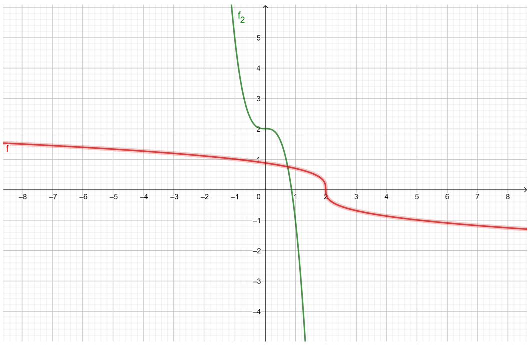
2. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 3x^3$.*

   Solución*:*

   Como x^3 es estrictamente creciente, f es estrictamente decreciente y por lo tanto inyectiva.

   Por otro lado, dado $y \in \mathbb{R}$, tenemos que $y = f(x)$ si y solo si $y = 2 - 3x^3$ si y solo si $\frac{2-y}{3} = x^3$ si y solo si $\sqrt[3]{\frac{2-y}{3}} = x$.

   Entonces f es también sobreyectiva y más aún $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{2-y}{3}}$.



f y f^{-1}, ambas con variable x.

3. *$f : \mathbb{R} \setminus \{5/2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ tal que $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$.*

   Solución*:*

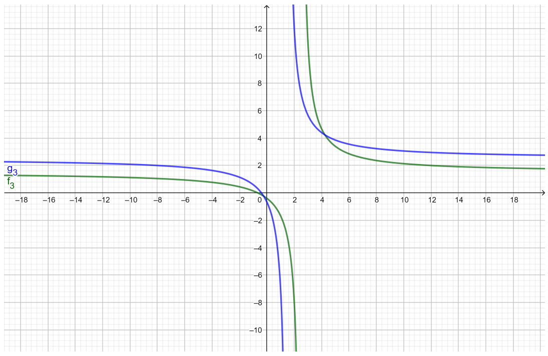
   La función f tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$ con un gráfico dividido en dos hojas (ver el gráfico). Para ver la inyectividad podemos tomar dos valores $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{5/2\}$ y resolver:

$$\frac{3x_1 + 2}{2x_1 - 5} = \frac{3x_2 + 2}{2x_2 - 5}.$$

   Despejando, esta ecuación queda equivalente a $15(x_2 - x_1) + 4(x_2 - x_1) = 0$ y por lo tanto la única posibilidad es $x_2 = x_1$.

   Ahora veamos que es sobreyectiva y calculemos su inversa:

   (si $x \neq \frac{5}{2}$; $y \neq \frac{3}{2}$), $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+2}{2x-5} \Leftrightarrow (2x-5)y = 3x+2 \Leftrightarrow x(2y-3) = 5y+2 \Leftrightarrow x = \frac{5y+2}{2y-3}$.
   Por lo tanto $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3/2\} \to \mathbb{R} \setminus \{5/2\}$, está dada por $f^{-1}(y) = \frac{5y+2}{2y-3}$.



f y f^{-1}, ambas con variable x.

4. *$f : \left[\frac{-4}{3}, \infty\right) \to [0, +\infty)$ con $f(x) = \sqrt{3x+4}$.*

   Solución*:*

   Para ver que f es inyectiva, vemos que

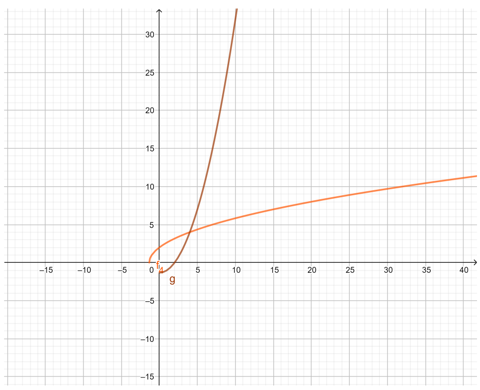
   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

   Ahora vemos la sobreyectividad y calculamos la inversa:

   Dado $y \in [0, +\infty)$ se tiene:

   $$f(x) = y \Rightarrow y = \sqrt{3x+4} \Rightarrow \frac{y^2 - 4}{3} = x.$$

   O sea $f^{-1} : [0, +\infty) \to [-\frac{4}{3}, +\infty) :\ f^{-1}(y) = \frac{y^2-4}{3}$.



f y f^{-1}, ambas con variable x.

Ejercicio 11 (Cálculo de función inversa II) *Demostrar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa. Graficar f^{-1}. Utilizar GeoGebra.*

1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.*

   Solución*:*

   Esta función es estrictamente creciente por lo tanto es inyectiva. Para la sobreyectividad y el cálculo de su inversa tenemos que dado $y \in \mathbb{R}$:

   $$y = f(x) \iff y = \sqrt[3]{x} + 1 \Rightarrow x = (y-1)^3.$$

   Por lo tanto $f^{-1}(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f^{-1}(y) = (y-1)^3$.

f y f^{-1}, ambas con variable x.

2. $f : [0,4] \to [0,32]$ *tal que* $f(x) = -x^2 - 4x + 32$.

   Solución:

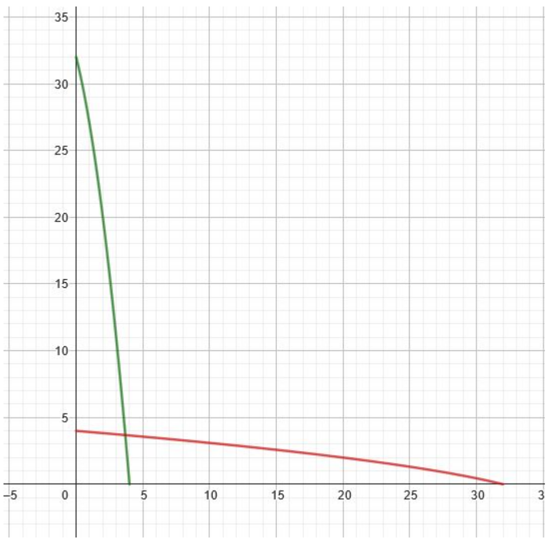
   Para trabajar con f *queda más sencillo completar cuadrados y observar que* $f(x) = -(x+2)+36$.

   Tomemos $x_1, x_2 \in [0,4]$ *tales que* $f(x_1) = f(x_2)$. *Entonces debe ser* $(x_1+2)^2 = (x_2+2)^2$ *y como* x_1+2 *y* x_2+2 *son números positivos, deben ser iguales, y por lo tanto* $x_1 = x_2$, *es decir* f *es inyectiva.*

   Si tomamos $y \in [0,32]$, *nos queda que* $y - 36 \in [-36,-4]$. *De donde, si tomamos* $x = \sqrt{-(y-36)} - 2$, *obtenemos:*

   $$f(x) = -(\sqrt{-(y-36)} - 2 + 2)^2 + 36 = -(\sqrt{36-y})^2 + 36 = y$$

   Por lo tanto f *es sobreyectiva y la inversa queda* $f^{-1} : [0,32] \to [0,4]$ *dada por* $f^{-1}(y) = \sqrt{36-y} - 2$



f y f^{-1}, ambas con variable x.

3. $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2\ln(x-1)$.

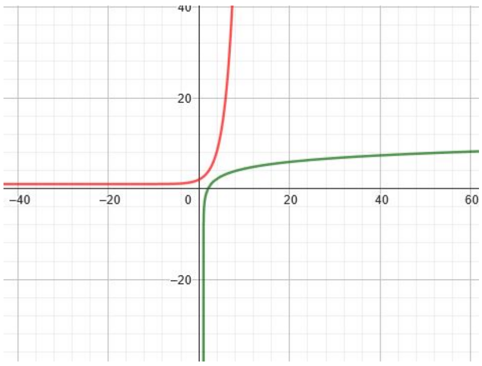
   Solución:

   Para ver la inyectividad resolvemos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\ln(x_1-1) = 2\ln(x_2-1) \Rightarrow x_1 = x_2$.

   Para ver la sobreyectividad y calcular la inversa:

   $y = 2\ln(x-1) \Leftrightarrow e^{y/2} = x-1 \Leftrightarrow x = e^{y/2}+1$.

   Luego $f^{-1} : \mathbb{R} \to (1,+\infty)$ *y está definida por* $f^{-1}(y) = e^{y/2}+1$.



f y f^{-1}, ambas con variable x.

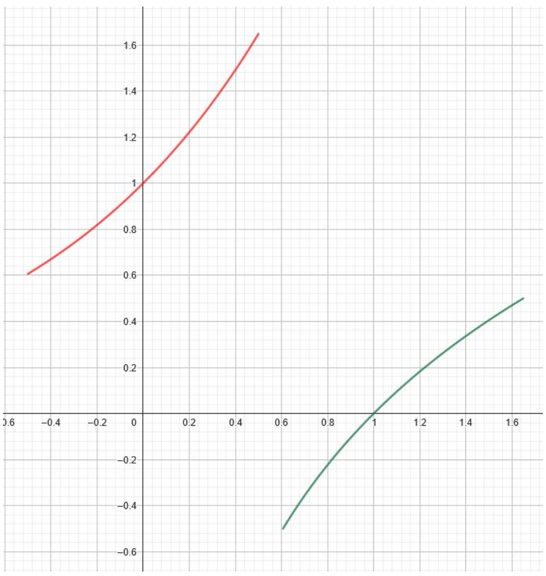
4. $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = e^x$.

   Solución:

   $e^{x_1} = e^{x_2}$ *si y solo si* $e^{x_1-x_2} = 1$ *si y solo si* $x_1 = x_2$. *Por lo tanto* f *es inyectiva.*

   Como ya sabemos que la inversa de la exponencial es el logaritmo, solo queda restringirle el dominio.

   La inversa queda $f^{-1} : \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right] \to \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *dada por* $f^{-1}(y) = \ln(y)$.



f y f^{-1}, ambas con variable x.

Ejercicio 12 (Ejercicios de pruebas anteriores) *Sean* $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ *y* $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *definidas por:*

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \quad y \quad g(x)=e^{-x/2}.$$

Consideramos la composición: $h=f\circ g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to Im(h)$.
Indicar la opción correcta:

1. *h es invertible y* $h^{-1}(x)=2\ln(\frac{x}{x-1})$.
2. *h no es invertible.*
3. *h es invertible y* $h^{-1}(x)=\ln(\frac{2x}{x-1})$.
4. *h es invertible y* $h^{-1}(x)=2\ln(\frac{1}{x})+1$.

Solución*:*

La función $h=f\circ g$ *queda bien definida ya que* $Im(g)=\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ *está contenida en el dominio de* f. *Además, h es inyectiva ya que ambas funciones lo son y la composición de funciones inyectivas es inyectiva.*

Se tiene

$$h(x)=\frac{1}{1-e^{-x/2}}.$$

La sobreyectividad de h es trivial, ya que por definición $Im(h)$ *es el conjunto de puntos con preimagen.*

Para buscar la inversa, despejamos:

$$1-e^{-x/2}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow e^{-x/2}=1-\frac{1}{y}\Leftrightarrow -\frac{x}{2}=\ln\left(1-\frac{1}{y}\right)=\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)$$

multiplicando por -2 *a ambos lados, concluimos que* $h^{-1}(y)=-2\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)=2\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$.

Por lo tanto la primer opcion es la correcta.

Ejercicio 13 (Ejercicios de pruebas anteriores) *Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.*

La función $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[0,2]$ *dada por* $f(x)=cos(x)+1$ *es biyectiva.*

Solución*: Falso.*

Observar que como $\cos(\pi/4)=\cos(-\pi/4)$, *tenemos que* $f(\pi/4)=f(-\pi/4)$ *y por lo tanto* f *no es inyectiva.*