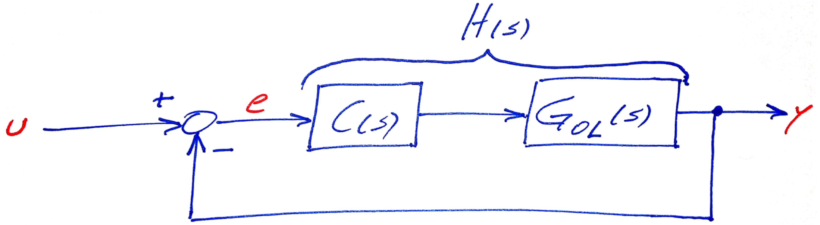
SyC - Hoja 9 - Ej. 2

2) Dado un sistema con realimentación unitaria y ganancia de lazo abierto:

$$G_{OL}(s) = \frac{1}{s(1+0{,}1.s)(1+0{,}2.s)(1+0{,}25.s)}$$

Diseñar un compensador serie tal que el sistema compensado tenga:

- margen de fase **Φ = 45° ± 1°**
- error en régimen estacionario frente a una rampa unitaria igual a 0,1.



Error en régimen estacionario

La función de transferencia de lazo abierto es

$$H(s) := C(s)G_{OL}(s) = C(s)\frac{1}{s\,(1+0{,}1s)\,(1+0{,}2s)\,(1+0{,}25s)}$$

donde $C(s)$ es la función de transferencia del compensador serie a diseñar y $G_{OL}(s)$ es la función de transferencia del sistema a compensar.

La constante de velocidad y el error en régimen, del lazo cerrado, frente a una rampa unitaria son:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} C(s) \quad \text{y} \quad e_{\infty}^{\text{rampa}} = \frac{1}{K_v},$$

respectivamente.

Se requiere $e_{\infty}^{\text{rampa}} = 0{,}1$, entonces se debe cumplir $K_v = 10$, o equivalentemente:

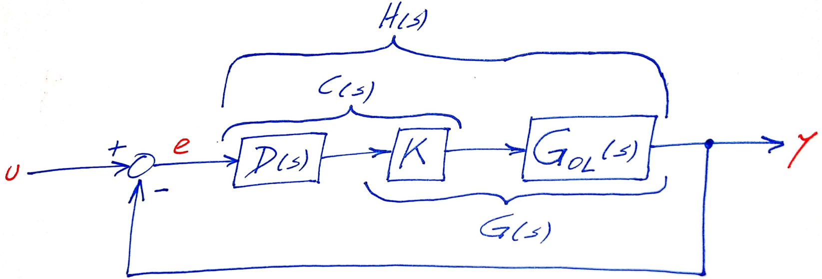
$$\boxed{\lim_{s\to 0} C(s) = 10}$$

Descomposición del compensador

Sean

$$C(s) := D(s)K \quad \text{y} \quad G(s) := KG_{OL}(s),$$

donde $K = 10$ y $D(s)$ es tal que $\lim_{s \to 0} D(s) = 1$.



Requerimientos:

- Error en régimen frente a la rampa unitaria igual a 0,1:
  Si el lazo cerrado resulta estable, alcanza con tomar $K = 10$.
- Margen de fase $\Phi = 45^\circ \pm 1^\circ$:
  Se diseñará $D(s)$, con ganancia unitaria en régimen estacionario, de manera tal de cumplir con este requerimiento.

Margen de fase "original" (para $D(s) = 1$)

Tomando momentáneamente $D(s) = 1$, evaluamos el margen de fase "original" que pretendemos mejorar.

Buscamos ω_c tal que $|G(\jmath\omega_c)| = 1$. Encontramos que para

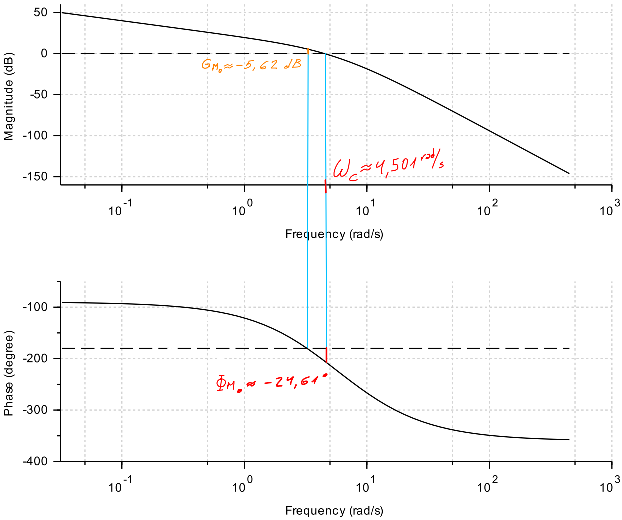
$$\omega_c \approx 4{,}501\,\mathrm{rad/s},$$

se tiene $|G(\jmath\omega_c)| \approx 1$.

El margen de fase "original" es:

$$\Phi_{M_o} = \underline{/G(\jmath\omega_c)} - (-\pi) = \pi + \underline{/G(\jmath\omega_c)} \approx -24{,}61^\circ$$

Margen de fase "original" (para $D(s) = 1$)



Si eligiéramos $C(s) = K = 10$, ¡el lazo cerrado resultaría inestable!

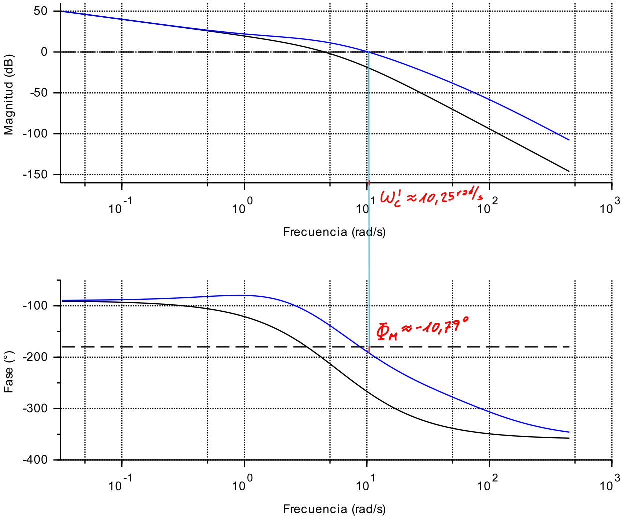
¿Compensación por adelanto?

Intentaremos mejorar el (pésimo) margen de fase “original” con con un compensador de adelanto:

$$D(s) = \frac{1 + Ts}{1 + aTs}, \qquad \text{donde} \qquad T > 0, \quad 0 < a < 1. \qquad (1)$$

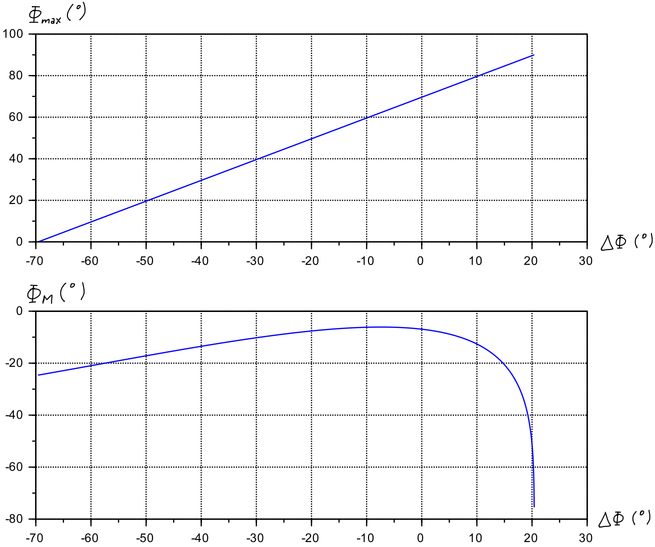
1. Estimamos la caída de fase: $\Delta\Phi \approx 8°$.
2. A partir de ${\Phi_M}^* = \Phi_{M_o} + \Phi_{\max} - \Delta\Phi$ calculamos: $\Phi_{\max} = {\Phi_M}^* - \Phi_{M_o} + \Delta\Phi = 45° - (-24{,}61°) + 8° = 77{,}61°$.
3. A partir de $\sin\Phi_{\max} = \frac{1-a}{1+a}$, calculamos: $a = \frac{1-\sin\Phi_{\max}}{1+\sin\Phi_{\max}} \approx 0{,}011\,78$.
4. Buscamos ω_c' tal que $|G(\jmath\omega_c')| = \sqrt{a} \approx 0{,}1085 \approx -19{,}28\,\mathrm{dB}$. Encontramos: $\omega_c' \approx 10{,}25\,\mathrm{rad/s}$.
5. Imponemos que $\omega_c' = \frac{1}{\sqrt{a}T}$ eligiendo: $T = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_c'} \approx 0{,}8989\,\mathrm{s}$

Lamentablemente ...



¡Aún faltan 55,79° para alcanzar el margen de fase requerido!

No alcanza con intentar mejorar la estimación de $\Delta\Phi$



¡No existe $\Phi_{\text{max}} \in (0^\circ, 90^\circ)$ capaz de estabilizar el lazo cerrado!

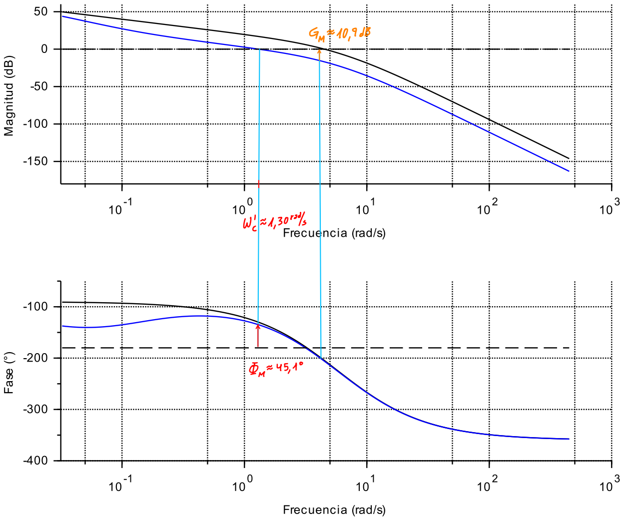
¿Compensación por atraso?

Intentaremos mejorar el (pésimo) margen de fase “original” con con un compensador de atraso:

$$D(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \qquad \text{donde} \quad T > 0, \quad 0 < a < 1. \qquad (2)$$

1. Buscamos ω_c' tal que $\angle G(\jmath\omega_c') = -180^\circ + \Phi_M{}^* + \Delta\Phi = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$. Encontramos: $\omega_c' \approx 1{,}30\,\mathrm{rad/s}$. Conociendo ω_c', evaluamos: $|G(\jmath\omega_c')| \approx 7{,}02$.
2. Como queremos que $a\,|G(\jmath\omega_c')| = 1$, tomamos $a = |G(\jmath\omega_c')|^{-1} \approx 0{,}142$.
3. Concretamos el posicionamiento de la “depresión” de atraso de fase del compensador en la “baja frecuencia”; por ejemplo imponiendo $\frac{1}{aT} \ll \omega_c'$, por ejemplo tomando $T = \frac{10}{a\omega_c'} \approx 54\,\mathrm{s}$.

Compensación por atraso



El compensador por atraso $C(s) = K\frac{1+aTs}{1+Ts}$, con $a = 0{,}142$, $T = 54\,\mathrm{s}$ y $K = 10$, cumple con todos los requerimientos.