Señales aleatorias y modulación
Primer Parcial - Parte I

Instituto de Ingeniería Eléctrica

25 de septiembre de 2021

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Considerar el proceso real de media móvil de orden 1 (MA(1) - *Moving Average*), definido como

$$Y[n] = \theta_0 + \epsilon[n] + \theta_1 \epsilon[n-1]$$

con $\epsilon[n]$ ruido blanco gausiano de media nula y varianza σ^2. Se pide:

(a) Calcular $E\{Y[n]\}$, $Var\{Y[n]\}$ y $Cov_Y[n,m]$

(b) ¿Es $Y[n]$ estacionario en sentido amplio (WSS)? Justificar.

(c) ¿Es $Y[n]$ ergódico en la media? Justificar a partir de alguna de las condiciones vistas en el curso. Para usar esas condiciones en el caso de procesos discretos, se recuerda que los promedios temporales para una señal discreta $x[n]$ se calculan como $\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]$.

Considerar ahora el proceso real autoregresivo de orden 1 (AR(1)) definido como

$$Y[n] = \phi Y[n-1] + \epsilon[n]$$

con $\epsilon[n]$ ruido blanco gausiano de media nula y varianza σ^2. Se pide:

(d) Hallar la expresión de $Y[n]$ como la salida de un filtro LTI con respuesta al impulso $h[k]$ alimentado con el ruido $\epsilon[n]$, y especificar qué condición debe cumplir el filtro para que $Y[n]$ sea WSS.

Para $Y[n]$ WSS, se pide:

(e) Calcular $E\{Y[n]\}$, $Var\{Y[n]\}$ y $C_Y[m] = Cov_Y[n, n+m]$. Para la auto-covarianza $C_Y[m]$, se sugiere calcularla para $m \geq 0$, y luego extenderla a todos los enteros utilizando la propiedad de simetría.

(f) ¿Es $Y[n]$ ergódico en la media? Justificar a partir de alguna de las condiciones vistas en el curso.

Pregunta 1

1. Dibuje un diagrama de bloques de un cuantizador no uniforme por compansión.
2. Explique cuáles son los objetivos de este tipo de cuantizador, cómo se alcanzan, y para qué tipo de señales es ventajoso frente a un esquema de cuantización uniforme.

Solución

Problema 1

(a) Como $\varepsilon[n]$ es ruido blanco de media nula:

$$E\{Y[n]\} = \theta_0 + E\{\varepsilon[n]\} + \theta_1 E\{\varepsilon[n-1]\} = \theta_0$$

Para el cálculo de $Var\{Y[n]\}$ y $Cov_Y[n,m]$ primero hallamos la autocorrelación de la señal como:

$$R_Y[n,m] = E\left\{(\theta_0 + \varepsilon[n] + \theta_1\varepsilon[n-1])\,(\theta_0 + \varepsilon[m] + \theta_1\varepsilon[m-1])\right\}$$

Desarrollando la expresión anterior y sabiendo que $\varepsilon[n]$ es ruido blanco de media nula y su autocorrelación es $R\varepsilon[n,m] = \sigma^2\delta(n-m)$ obtenemos:

$$R_Y[n,m] = \theta_0^2 + \sigma^2(1+\theta_1^2)\delta[n-m] + \theta_1\sigma^2(\delta[n-m+1] + \delta[n-m-1])$$

Por lo tanto:

$$Var\{Y[n]\} = R_Y[n,n] - E^2\{Y[n]\} = \sigma^2\left(1+\theta_1^2\right)$$

$$Cov_Y[n,m] = R_Y[n,m] - E\{Y[n]\}E\{Y[m]\} = \sigma^2\left[\left(1+\theta_1^2\right)\delta[n-m] + \theta_1(\delta[n-m-1] + \delta[n-m+1])\right]$$

(b) A partir de los resultados obtenidos en la parte anterior observamos que el proceso $Y[n]$ es de segundo orden con media constante y su autocorrelación solo depende de la diferencia de tiempos $m-n$ por lo tanto es WSS.

(c) Como el proceso es WSS podemos escribir:

$$C_Y[k] = \sigma^2\left[\left(1+\theta_1^2\right)\delta[k] + \theta_1(\delta[k-1] + \delta[k+1])\right]$$

Observamos que:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} C_Y[k] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}\sigma^2(1+\theta_1^2+2\theta_1) = 0$$

Por lo tanto, aplicando condiciones necesarias y suficientes de ergodicidad en m.c. tenemos que $Y[n]$ es ergódico en media.

(d) La respuesta al impulso del filtro LTI es

$$h[k] = \phi^k u[k]$$

Por lo tanto:

$$Y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\epsilon[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon[n-k]$$

El filtro LTI causal es estable si y solo si $|\phi| < 1$.

(e) Como $Y[n]$ es WSS y $\varepsilon[n]$ es ruido blanco de media nula:

$$E\left\{Y[n]\right\} = \phi E\left\{Y[n-1]\right\} + E\left\{\epsilon[n]\right\} = \phi E\left\{Y[n]\right\}$$

Como por parte anterior tenemos que $|\phi| < 1$ obtenemos:

$$E\{Y[n]\} = 0$$

Para el cálculo de $Var\{Y[n]\}$ y $C_Y[m]$ primero hallamos la autocorrelación de la señal para $m > 0$:

$$R_Y[n, n+m] = E\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \ \epsilon[n-i] \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \ \epsilon[n+m-j]\right\} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{i+j} \ E\left\{\epsilon[n-i]\epsilon[n+m-j]\right\}$$

Como $\varepsilon[n]$ es ruido blanco de autocorrelación $R\varepsilon[n, m] = \sigma^2\delta(n-m)$ obtenemos:

$$R_Y[n, n+m] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{i+j} \ \sigma^2 \ \delta[m+i-j] = \phi^m \ \sigma^2 \ \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} = \frac{\phi^m \ \sigma^2}{1-\phi^2}$$

Aplicando propiedad de simetría extendemos la autocorrelación a todos los enteros como:

$$R_Y[m] = \frac{\phi^{|m|} \ \sigma^2}{1-\phi^2}$$

Por lo tanto:

$$Var\{Y[n]\} = R_Y[n, n] - E^2\{Y[n]\} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

$$C_Y[m] = R_Y[m] - E^2\{Y[n]\} = R_Y[m]$$

(f) Como $Y[n]$ es WSS observamos que:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} C_Y[k] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \ \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \ \sum_{k=-N}^{N} \phi^{|k|} = 0$$

Por lo tanto, tenemos que $Y[n]$ es ergódico en media.