Práctico 9: Derivadas

Ejercicio 1 (Recta tangente) 1. *Indicar los valores de m y n de la recta $y = mx + n$ tangente a la función f en el punto $P = (a, f(a))$ (asumiendo que existe).*

2. *Hallar la recta tangente para las siguientes funciones en los puntos indicados:*

   a) $f(x) = 3x + 4$ *en* $(1, 7)$.
   b) $f(x) = 4x^2 - 3x$ *en* $(-1, 7)$.
   c) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ *en* $(-1, 0)$.
   d) $f(x) = \frac{6}{x+1}$ *en* $(2, 2)$.
   e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ *en* $(0, 0)$.
   f) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$ *en* $(4, 5)$.

Ejercicio 2 (Derivada en un valor) *Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones en el valor indicado:*

1. $f(x) = 1 - 3x^2$ *en 2.*
2. $f(x) = 2 - 3x + x^2$ *en -1.*
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *en 4.*
4. $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ *en 4.*

Ejercicio 3 (Función derivada) *Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = x^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ *con* $n \in \mathbb{N}$.
4. $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

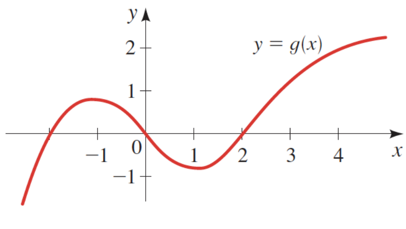
Sugerencia: para la parte 1 utilizar la siguiente igualdad $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$

Ejercicio 4 *Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de $58m/s$, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H(t) = 58t - 0{,}83t^2$.*

1. *Hallar la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.*
2. *¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?*
3. *¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?*

Ejercicio 5 (Estimación gráfica de derivadas) *Para la función g cuya gráfica es la que se muestra a continuación, ordenar los siguientes valores en orden creciente justificando la respuesta.*

$$g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(1) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



Ejercicio 6 (Existencia derivada) *Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.*

Ejercicio 7 (Derivada y crecimiento) *Las funciones de la figura 2 son las derivadas de las funciones de la figura 1 en desorden. Indicar cuál es la derivada correspondiente de cada función.*

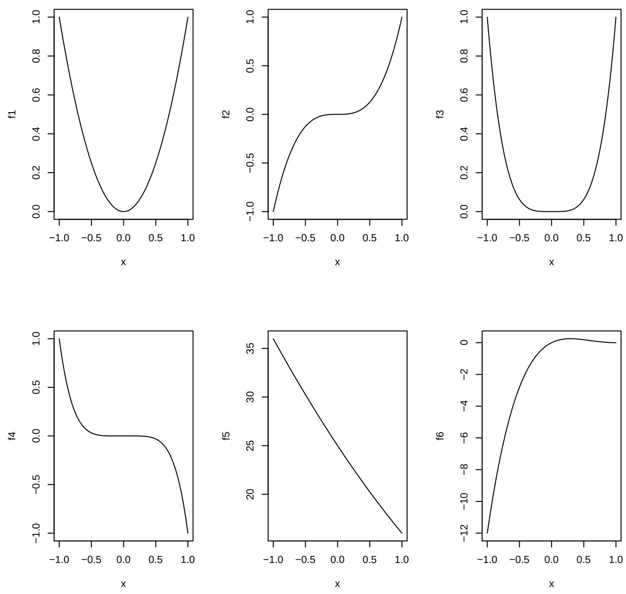


Figura 1: Funciones.

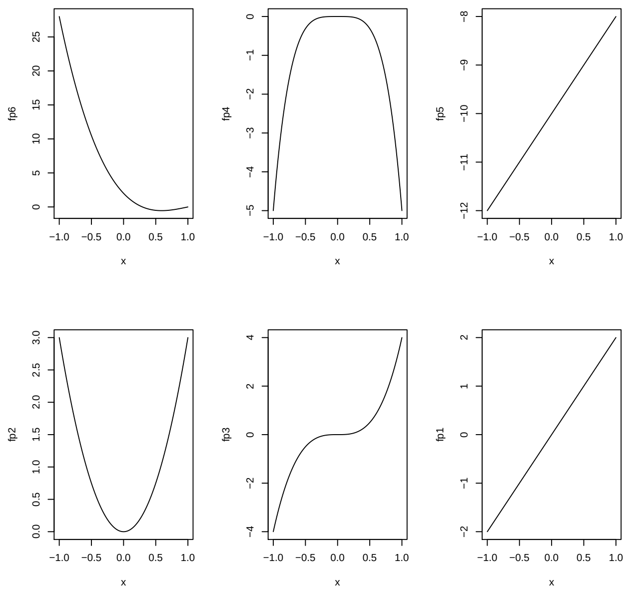


Figura 2: Derivadas.

Ejercicio 8 (Identificación gráfica de extremos) *Usando la gráfica de la función, Fig. 3 determinar:*

1. *los valores críticos;*
2. *los extremos absolutos y relativos y donde se alcanzan.*

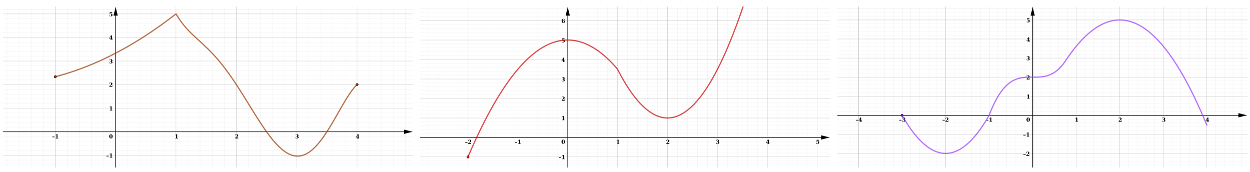


Figura 3: Identificación gráfica de extremos

Ejercicio 9 (Crecimiento y extremos) *Dada la gráfica de una cierta función que se muestra a continuación Fig. 9, estimar:*

1. *los intervalos de crecimiento y decrecimiento,*
2. *donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos,*
3. *puntos de cortes con los ejes,*
4. *dominio de la función.*

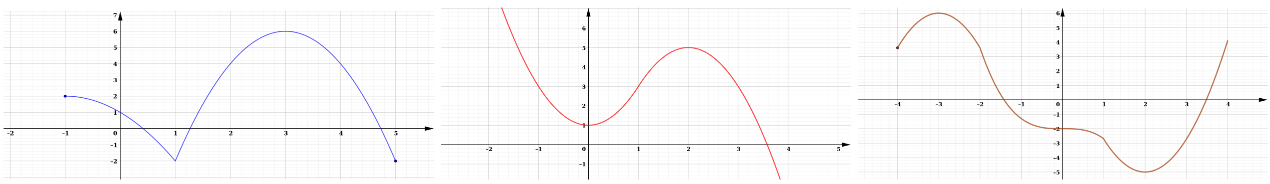


Figura 4: Crecimiento y extremos

Observación: en lo que sigue se aceptan como conocidas las siguentes derivadas:

- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$
- $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$

Ejercicio 10 (Operaciones y derivada) *Recordar las siguientes propiedades de la derivada (en caso de que exista):*

- *Derivada de la suma:* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- *Derivada del producto:* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- *Derivada del cociente:* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

1. **Derivada de una combinación lineal.**. *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^{27} - 15x^{10} + 7x^3 - 3$.

b) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^3}$.

2. **Derivada del producto.** *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = x^3 e^x$.

   b) $f(x) = x\ln(x) - x$.

   c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

   d) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$.

3. **Derivada del cociente.** *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

   b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

   c) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}$.

   d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$.

Ejercicio 11 (Derivada de la composición - regla de la cadena) *Se consideran las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 5$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x$.*

1. *Hallar $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$, y $G : G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *Calcular $F'(x)$ y $G'(x)$, $\forall x \in R$, usando la regla de la cadena y compruebe el resultado obtenido derivando directamente.*

Ejercicio 12 (Operaciones y derivada) *Hallar f' en función de g y g', para los siguientes ejemplos:*

1. $f(x) = g(x) + (x - a)$
2. $f(x) = g(x)(x - a)$
3. $f(x) = g(a)(x - a)$
4. $f(x) = g(x + g(a))$
5. $f(x) = g(xg(a))$
6. $f(x) = g(x + g(x))$
7. $f(x + 3) = g(x^3)$
8. $f(x^3) = g(x + g(x))$

Ejercicio 13 (Regla de la cadena)

1. *Sean $f : f(x) = \ln(x)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(1) = 6$ y $g'(1) = 2$. Halle, usando la regla de la cadena, la derivada de $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, en $x = 1$.*
2. *Sean $f : f(x) = e^{3x}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(2) = 0$ y $g'(2) = 4$. Halle, usando la regla de la cadena, la derivada de $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, en $x = 2$.*

Ejercicio 14 (Regla de la cadena) *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$
2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 2})$
3. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$
4. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$