

Entregable 4: Métodos Proximales y ADMM

26 de octubre de 2023

Instrucciones

Objetivo El objetivo del informe es mostrar que el estudiante fue capaz de resolver una serie de problemas teóricos e implementar y analizar una serie de problemas prácticos. En el primer caso, es fundamental justificar cualquier paso no trivial de la resolución. En el caso de problemas prácticos, es fundamental analizar y comentar todo resultado que se obtenga.

Contenido El informe debe contener: resolución detallada de problemas teóricos, resultados de los problemas prácticos, análisis y discusión de los resultados obtenidos. No es necesario (ni aconsejable) incluir: letra de ejercicios, código de los ejercicios prácticos. El código de los ejercicios prácticos debe incluirse en un archivo aparte para posible referencia por parte de los docentes.

Autoría Esta es una tarea *individual*. Sus ejercicios deben ser resueltos por el estudiante cuyo nombre, cédula y firma se deben incluir en la carátula del informe. No es admisible la realización colectiva de ninguno de los ejercicios ni sus partes. Tampoco es admisible la búsqueda y/o reutilización, total o parcial, de material en Internet u otros medios, así como entregas disponibles de años anteriores.

Sí es admisible y aconsejable consultar, cotejar, e intercambiar ideas y sugerencias con otros estudiantes. También es admisible utilizar material de referencia tales como: documentación sobre lenguajes de programación, resultados, definiciones y propiedades matemáticas, incluyendo todo el material expuesto en el teórico de este curso, tanto teórico como práctico.

También es admisible la reproducción e inclusión de recetas y código relacionado con aspectos auxiliares, tales como el graficado de funciones, etc., que no hacen al objetivo de los ejercicios.

Sanciones Cualquier violación a las anteriores reglas constituye una *falta disciplinaria*. En primera instancia, dicha falta implica la pérdida de los puntos del obligatorio en su totalidad. En caso de reincidencia, se desvinculará al estudiante del curso y quedará registrado como reprobado.

Conformidad

Todo informe debe incluir una carátula identificando claramente el obligatorio al que hace referencia, la fecha, y el/la autor/a del trabajo. En el último caso, debe incluirse nombre, cédula de identidad (o equivalente), y firma, preferentemente digital. Asimismo, debe incluirse de manera obligatoria el siguiente texto:

i) He leído y estoy de acuerdo con las Instrucciones especificadas en la carátula obligatorio. ii) He resuelto por mi propia cuenta los ejercicios, sin recurrir a informes de otros compañeros, o soluciones existentes. iii) Soy el único autor de este trabajo. El informe y todo programa implementado como parte de la resolución del obligatorio son de mi autoría y no incluyen partes ni fragmentos tomados de otros informes u otras fuentes, salvo las excepciones mencionadas.

Ejercicio 1 - Métodos proximales

a) Probar que si $g(x) = I_C(x)$ es la función indicatriz de un conjunto C convexo,

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & , x \in C \\ \infty & , x \notin C \end{cases} ,$$

entonces $\text{prox}_{I_C}(x) = \Pi_C(x)$, donde $\Pi_C(x)$ es la proyección al conjunto C ,

$$\Pi_C(x) = \min_{z \in C} \|x - z\|.$$

Ejercicio 2 - LASSO

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, el siguiente problema es conocido como LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator [1], ver también¹):

$$x^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1.$$

En adelante definimos $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ y $g(x) = \lambda \|x\|_1$, los dos términos de la función objetivo del LASSO. A $f(x)$ se la suele denominar *ajuste a datos* y a $g(x)$ la *penalización o regularización*.

La gracia del LASSO es que permite hacer una regresión lineal en la cual sólo unos pocos valores de la solución son no nulos: mientras más grande λ , menos elementos no nulos tendrá x^* (a costo de un mayor valor de $f(x)$).

Con los datos proporcionados junto con el obligatorio, y usando $\lambda = 0,15$, se hallará la solución de este problema usando dos métodos distintos descritos a continuación. En ambos casos, se usará la misma condición inicial y condición de parada: ambos métodos terminarán cuando la diferencia entre la función objetivo en iteraciones consecutivas sea menor a 0,0001.

- Calcule el operador proximal de $g(x)$
- Calcule el operador proximal de $f(x)$
- Calcular numéricamente la solución del LASSO usando *Proximal Gradient Descent* con paso fijo $\alpha = 1/\|A^T A\|_2$. Notar que λ no es un parámetro del método sino de la función objetivo.
- Calcular numéricamente la solución del LASSO usando el método ADMM.
- Compare el tiempo de ejecución de ambos métodos, graficando la evolución de la función objetivo de ambos métodos con las iteraciones en una misma gráfica.

Referencias

- [1] Robert Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58(1):267–288, 1996.

¹[https://en.wikipedia.org/wiki/Lasso_\(statistics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Lasso_(statistics))