Universidad de la República **19 de julio de 2023**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA (SOLUCIÓN)

Ejercicio 1

El intervalo a aplicar en este caso es $\left[\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$. Sabemos que $\overline{X}_n = 4$ y que cuando $1-\alpha = 0.78$ (o sea $\alpha = 0.22$) el intervalo queda $[3.89; 4.11]$ entonces $\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = 4 - \frac{S_n}{\sqrt{500}} z_{0.11} = 4 - \frac{S_n}{\sqrt{500}} 1.226 = 4 - 0.054828 S_n = 3.89$ de donde se deduce que $S_n = \frac{4-3.89}{0.054828} = 2.0063$.

Hallamos el intervalo en el caso $\alpha = 0.01$, o sea que $\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = 4 - \frac{2.0063}{\sqrt{500}} \times 2.5758 = 3.7689$, mientras que $\overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = 4 + \frac{2.0063}{\sqrt{500}} \times 2.5758 = 4.2311$ por lo que el intervalo queda $[3.769; 4.231]$.

Ejercicio 2

Si le llamamos X a la variable que cuenta la cantidad de lanzamientos del dado hasta que salga número impar por primera vez, resulta ser $X \sim$Geo$(p = 1/2)$. Entonces $Y = 1000X$ =cantidad de pesos que se gana en este juego. Entonces

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1000X) = 1000 \times \frac{1}{p} = 1000 \times \frac{1}{/1/2} = 2000.$$

Ejercicio 3

Le llamamos $L =$ es elegida Laura para el próximo peritaje, $J =$ es elegido Juan para el próximo peritaje, $M =$ el proceso mejora luego del próximo peritaje, tenemos que $P(L) = 0.55$, $P(J) = 0.45$.Sabemos que $P(M/L) = 0.98$ y que $P(J/M) = 0.429$.

Si le llamamos $x = P(M/J)$.

Tenemos que

$$P(J/M) = \frac{P(M/J)\,P(J)}{P(M/J)\,P(J) + P(M/L)\,P(L)} = \frac{0.45x}{0.45x + 0.55 \times 0.98} = 0.429,$$

por lo que despejando deducimos que $x = 0.9$.

Ejercicio 4

La probabilidad de que una bala tenga alta precisión es $P(X > 8.5) = 1 - F_X(8.5) = 1 - (19 - 2 \times 8.5)(8.5-8)^2 = 0.5$.

Si le llamamos $Y =$ cantidad de balas de alta precisión entre las 10 del cartucho, tenemos que $Y \sim$Bin$(n = 10, p = 1/2)$. La probabilidad de que el cartucho tenga al menos 3 balas de alta precisión es $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) = 0.945$.

Ejercicio 5

$P(Y \leq X) = \frac{2}{1+a}\int_0^1 \left(\int_0^x (x+ay)\,dy\right)dx = ... = \frac{a+2}{3(1+a)}$.

Por otro lado $f_X(x) = \frac{2}{1+a}\int_0^1 (x+ay)\,dy = 2\frac{\frac{1}{2}a+x}{a+1} = \frac{a+2x}{1+a}$ para $0<x<1$, $f_X(x)=0$ en otro caso y $f_Y(y) = \frac{2}{1+a}\int_0^1 (x+ay)\,dx = \frac{1+2ay}{1+a}$ para $0<y<1$, $f_Y(y)=0$ en otro caso,

Planteando la igualdad $f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$ para $0<x,y<1$ (fuera de la región $0<x,y<1$ se cumple la igualdad para todo $a \geq 0$) queda $\frac{a+2x}{1+a}\frac{1+2ay}{1+a} = \frac{2(x+ay)}{1+a}$ vemos que se cumple cuando $a=0$ mientras que cuando $a>0$ no se cumple dado que derecho de la igualdad queda una expresión lineal en x, y, (polinomio de grado 1 en x, y) mientras que del izquierdo queda un polinomio de grado 2 en x, y.

Por lo tanto se tiene que X e Y son independientes únicamente cuando $a=0$.

Ejercicio 6

$\int_1^\theta \frac{k}{x^2}dx = \frac{k}{\theta}(\theta-1) = 1$ entonces $k = \frac{\theta}{\theta-1}$.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^n \begin{cases} \frac{\theta}{(\theta-1)x_i^2} & \text{si} \quad 1 \leq x_i \leq \theta \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} =$$

$\begin{cases} \left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)^n \frac{1}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} & \text{si} \quad 1 \leq x_1, x_2, ..., x_n \leq \theta \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$ resulta que $L(\theta)$ es una función decreciente cuando

$\theta \geq x_1, x_2, ..., x_n$ (o sea cuando $\theta \geq \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$) y cero en otro caso, entonces la función

$L(\theta)$ se maximiza en $\widehat{\theta} = \max\{X_1, X_2, ..., Xn\}$.

Ejercicio 7

Si le llamamos U y E a variables aleatorias con distribuciones $U(1,4)$ y $Exp(\lambda = 0.1)$ respectivamente, tenemos que

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 0.6P(U \leq t) + 0.4P(E \leq t) =$$

$$0.6F_U(t) + 0.4F_E(t) \overset{\text{para } 1<t<4}{=} 0.6\frac{t-1}{3} + 0.4\left(1 - e^{-0.1t}\right) = 0.2t - 0.4e^{-0.1t} + 0.2.$$

Por otro lado, derivando tenemos que

$f_T(t) = 0.6f_U(t) + 0.4f_E(t)$ por lo que $\mathbb{E}(T) = 0.6\mathbb{E}(U) + 0.4\mathbb{E}(E) = 0.6 \times 2.5 + 0.4 \times 10 = 5.5$.

Ejercicio 8

Con los datos de la muestra obtenemos $\overline{X}_n = 28.11$, $S_n = 7.0257$, planteamos la prueba $H_0: \mu = 24$ versus $H_1: \mu \neq 24$.

La región crítica de nivel α es $RC = \left\{\left|\overline{X}_n - 24\right| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$
Para tomar la decisión al nivel $\alpha = 0.2$ rechazamos H_0 porque
$\left|\overline{X}_n - 24\right| = 4.11 \geq \frac{S_n}{\sqrt{9}}t_{0.1}(8) = 3.271.$
Para tomar la decisión al nivel $\alpha = 0.1$ no rechazamos H_0 porque
$\left|\overline{X}_n - 24\right| = 4.11 \ngeq \frac{S_n}{\sqrt{9}}t_{0.05}(8) = 4.35.$