| $N^o$ de lista | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Respuestas

| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Ej. 5 | Ej. 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| Ej. 7 | Ej. 8 | Ej. 9 | Ej. 10 | Des. 1 | Des. 2 |
| | | | | | |

## Importante

- El examen dura 3 horas y 30 minutos.
- Consta de 8 ejercicios múltiple opción de 10 puntos cada uno y uno de desarollo de 20 puntos.
- El estudiante **elegirá 8 preguntas múltiple opción** de las 10, ingresando sus respuestas en el cuadro de respuestas de esta hoja e ingresando una cruz (o X) en las preguntas que decida no contestar.
- En caso de ingresar más respuestas se corregirán sólo las primeras 8.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.
- El ejercicio de desarrollo se entregará en **hojas a parte, con nombre, documento, número de prueba y cantidad de hojas entregadas** indicado claramente en la parte superior de cada hoja.
- El examen se salva con 60 puntos o más.

## Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9924 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9958 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |

**Tabla de $t$ Student**

| | Probabilidad de cola derecha $P(t \geq c)$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **GdL** | **.25** | **.20** | **.15** | **.10** | **.05** | **.025** | **.02** | **.01** | **.005** | **.0025** | **.001** |
| **1** | 1.00 | 1.38 | 1.96 | 3.08 | 6.31 | 12.71 | 15.89 | 31.82 | 63.66 | 127.32 | 318.31 |
| **2** | 0.82 | 1.06 | 1.39 | 1.89 | 2.92 | 4.30 | 4.85 | 6.96 | 9.92 | 14.09 | 22.33 |
| **3** | 0.76 | 0.98 | 1.25 | 1.64 | 2.35 | 3.18 | 3.48 | 4.54 | 5.84 | 7.45 | 10.21 |
| **4** | 0.74 | 0.94 | 1.19 | 1.53 | 2.13 | 2.78 | 3.00 | 3.75 | 4.60 | 5.60 | 7.17 |
| **5** | 0.73 | 0.92 | 1.16 | 1.48 | 2.02 | 2.57 | 2.76 | 3.36 | 4.03 | 4.77 | 5.89 |
| **6** | 0.72 | 0.91 | 1.13 | 1.44 | 1.94 | 2.45 | 2.61 | 3.14 | 3.71 | 4.32 | 5.21 |
| **7** | 0.71 | 0.90 | 1.12 | 1.41 | 1.89 | 2.36 | 2.52 | 3.00 | 3.50 | 4.03 | 4.79 |
| **8** | 0.71 | 0.89 | 1.11 | 1.40 | 1.86 | 2.31 | 2.45 | 2.90 | 3.36 | 3.83 | 4.50 |
| **9** | 0.70 | 0.88 | 1.10 | 1.38 | 1.83 | 2.26 | 2.40 | 2.82 | 3.25 | 3.69 | 4.30 |
| **10** | 0.70 | 0.88 | 1.09 | 1.37 | 1.81 | 2.23 | 2.36 | 2.76 | 3.17 | 3.58 | 4.14 |

**Tabla de $\chi^2$**

| | Probabilidad de cola derecha $P(\chi^2 \geq c)$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **GdL** | **.25** | **.20** | **.15** | **.10** | **.05** | **.025** | **.02** | **.01** | **.005** | **.0025** | **.001** |
| **1** | 1.32 | 1.64 | 2.07 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 5.41 | 6.63 | 7.88 | 9.14 | 10.83 |
| **2** | 2.77 | 3.22 | 3.79 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 7.82 | 9.21 | 10.60 | 11.98 | 13.82 |
| **3** | 4.11 | 4.64 | 5.32 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 9.84 | 11.34 | 12.84 | 14.32 | 16.27 |
| **4** | 5.39 | 5.99 | 6.74 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 11.67 | 13.28 | 14.86 | 16.42 | 18.47 |
| **5** | 6.63 | 7.29 | 8.12 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 13.39 | 15.09 | 16.75 | 18.39 | 20.52 |
| **6** | 7.84 | 8.56 | 9.45 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 15.03 | 16.81 | 18.55 | 20.25 | 22.46 |
| **7** | 9.04 | 9.80 | 10.75 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 16.62 | 18.48 | 20.28 | 22.04 | 24.32 |
| **8** | 10.22 | 11.03 | 12.03 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 18.17 | 20.09 | 21.95 | 23.77 | 26.12 |
| **9** | 11.39 | 12.24 | 13.29 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 19.68 | 21.67 | 23.59 | 25.46 | 27.88 |
| **10** | 12.55 | 13.44 | 14.53 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 21.16 | 23.21 | 25.19 | 27.11 | 29.59 |

# Ejercicios Múltiple Opción

**Ejercicio 1 (10 puntos)**

En un tablero de ta-te-ti (i.e. una grilla de 3 por 3) en blanco se colocan **4 cruces** en posiciones elegidas al azar.

¿Cuál es la probabilidad de que no formen ta-te-ti? Un ta-te-ti consiste en tres cruces en la misma fila, en la misma columna, o en la misma diagonal.

Sugerencia: Observar que no es posible que 4 cruces formen 2 ta-te-ti al mismo tiempo. Puede ser más fácil calcular la probabilidad de que sí se forme un ta-te-ti.

**(A)** 0.38 **(B)** 0.10 **(C)** 0.15 **(D)** 0.41 **(E)** 0.62 **(F)** 0.90

**Ejercicio 2 (10 puntos)**

En cierta materia se toman dos pruebas parciales. Para analizar estadísticamente el rendimiento de los estudiantes se registra una gran lista $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ donde $x_i$ es el puntaje en la primera prueba del $i$-ésimo estudiante, e $y_i$ es el puntaje del mismo estudiante en la segunda prueba.

A partir de estos datos se calculó el puntaje promedio histórico en la primer prueba obteniendo, $\bar{x} = 25.7$ puntos, y el desvío estandard, $s_x = 12.3$ puntos para la misma prueba.

Repitiendo la misma metodología se obtuvo para la segunda prueba el puntaje promedio, $\bar{y} = 32.7$ puntos, y el desvío estandard $s_y = 15.3$ puntos.

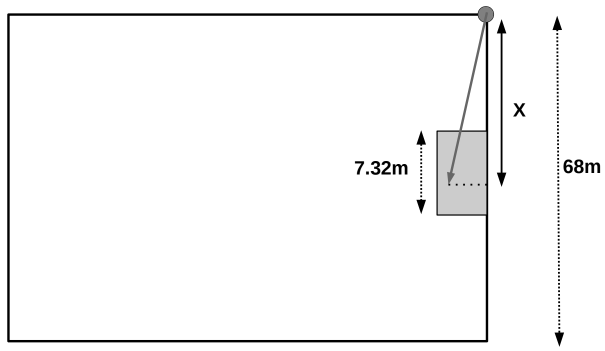
Por último se estimó el coeficiente de correlación entre ambas pruebas $r = 0.85$.

Si las variables $X$ (puntaje en la primera prueba de un estudiante elegido al azar) e $Y$ (puntaje en la segunda prueba de un estudiante elegido al azar) tienen distribución normal bivariada, ¿cuál es el puntaje esperado en la segunda prueba para un estudiante que sacó 30 puntos en la primera?

(**A**) 12.47 (**B**) 15.33 (**C**) 30.62 (**D**) 32.37 (**E**) 37.25 (**F**) 58.2

**Ejercicio 3 (10 puntos)**

La cancha del estadio Al Janub de Qatar mide 68 metros de ancho y el largo del arco es de 7.32 metros. Un jugador patea una pelota desde el corner: sea $X$ la proyección sobre el ancho de la cancha de la posición final de la pelota (como se indica en la figura). Asumiendo que $X$ sigue una distribución normal de media $30m$ y varianza $4m^2$, ¿cuál es la probabilidad que al patear una pelota desde el corner, ésta caiga delante del arco? (Seguimos mirando solamente la distancia $X$.)




(**A**) 0.11 (**B**) 0.43 (**C**) 0.57 (**D**) 0.93 (**E**) 0.97 (**F**) 1

**Ejercicio 4 (10 puntos)**

Hay algunas ovejas de producción lanera que tienen lunares de lana negra, lo que baja su valor comercial. Se sabe que hay un gen que tiene dos varientes. Si las ovejas tienen la variante **A**, entonces no tienen lunares. En cambio, si tienen la variante **B** la cantidad de lunares que pueden tener sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 2$. Se sabe además que la frecuencia de la variante**B** en la población es 70%. Un productor tiene que seleccionar un carnero para la próxima ronda de reproducción.¿Si elige uno que no tenga manchas, cuál es la probabilidad que ese carnero tenga la variante **A**?

(**A**) 0.14 (**B**) 0.30 (**C**) 0.43 (**D**) 0.50 (**E**) 0.76 (**F**) 0.97

---

**Ejercicio 5 (10 puntos) Test de permutaciones**

Cuatro gamers quieren probar si una nueva estrategia de juego *es mejor* que la usual. Para ello se dividen en dos grupos al azar, donde dos de ellos jugarán con la estrategia usual y dos con la nueva. Luego de una partida los jugadores que lo hicieron con la estrategia usual obtuvieron 33 y 22 puntos, mientras los que lo hicieron con la nueva, obtuvieron 40 y 28.

Usando como estadístico la suma de puntos de la nueva estrategia decidir si la nueva estrategia es mejor que la usual, usando $\alpha = 0.2$ como valor crítico.

(**A**) El $p$-valor obtenido es 0.17 por lo tanto tenemos evidencia suficiente para aceptar la hipótesis que la nueva estrategia es mejor.

(**B**) El $p$-valor obtenido es 0.33 por lo tanto tenemos evidencia suficiente para aceptar la hipótesis que la nueva estrategia es mejor.

(**C**) El $p$-valor obtenido es 0.55 por lo tanto tenemos evidencia suficiente para aceptar la hipótesis que la nueva estrategia es mejor.

(**D**) El $p$-valor obtenido es 0.17 por lo tanto no hay evidencia suficiente para aceptar la hipótesis que la nueva estrategia sea mejor.

(**E**) El $p$-valor obtenido es 0.33 por lo tanto no hay evidencia suficiente para aceptar la hipótesis que la nueva estrategia sea mejor.

(**F**) El $p$-valor obtenido es 0.55 por lo tanto no hay evidencia suficiente para aceptar la hipótesis que la nueva estrategia sea mejor.

---

**Ejercicio 6 (10 puntos)**

Sea $X$ una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $\lambda$ desconocido. Se tiene una muestra aleatoria simple $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$ de $X$ de la cual se sabe que $x_1 + \cdots + x_{200} = 500$. Indicar cuál es el estimador ($\hat{\mu}_2$) por el método de los momentos de $\mu_2 = \mathbb{E}(X^2)$.

(**A**) 0.16 (**B**) 0.40 (**C**) 2.50 (**D**) 3.75 (**E**) 8.75 (**F**) Faltan datos

---

**Ejercicio 7 (10 puntos)**

Una compañía de seguros de automóviles quiere estimar qué porcentaje de los conductores maneja sin usar el celular. Realizaron una encuesta a 400 conductores y 320 de ellos afirmaron que nunca usan el celular mientras manejan. Indicar cuál de los siguientes intervalos es un intervalo de confianza aproximado a nivel 95 % para el porcentaje real de conductores que manejan sin usar el celular:

(**A**) $I = [79\,\%, 81\,\%]$ (**C**) $I = [66\,\%, 94\,\%]$ (**E**) $I = [61\,\%, 99\,\%]$

(**B**) $I = [73\,\%, 88\,\%]$ (**D**) $I = [76\,\%, 84\,\%]$ (**F**) Faltan datos

---

**Ejercicio 8 (10 puntos)**

Se sabe que la duración de una bombita elegida al azar de una fábrica tiene distribución exponencial siendo la duración media de las bombitas de 2 años. La probabilidad que una bombita dure más de dos años es:

(**A**) 0.02 (**B**) 0.04 (**C**) 0.37 (**D**) 0.50 (**E**) 0.74 (**F**) 0.89

**Ejercicio 9 (10 puntos)**

En determinado arroyo, la probabilidad de pescar un Pejerrey por cada hora de pesca es 0.3. En el verano, José fue a pescar en 70 ocasiones independientes, de 1 hora cada una. Si la probabilidad de pescar más de un Pejerrey en una hora es despreciable, la probabilidad de que al final del verano haya pescado al menos 25 peces es aproximadamente igual a

(**A**) 0.35 (**B**) 0.43 (**C**) 0.30 (**D**) 0.15 (**E**) 0.75 (**F**) 0.83

**Ejercicio 10 (10 puntos)**

Un examen consta de 10 preguntas del tipo verdadero o falso. Se plantea un test con las hipótesis siguientes

$H_E$: el estudiante contesta al azar

$H_A$: $H_E$ no es cierto.

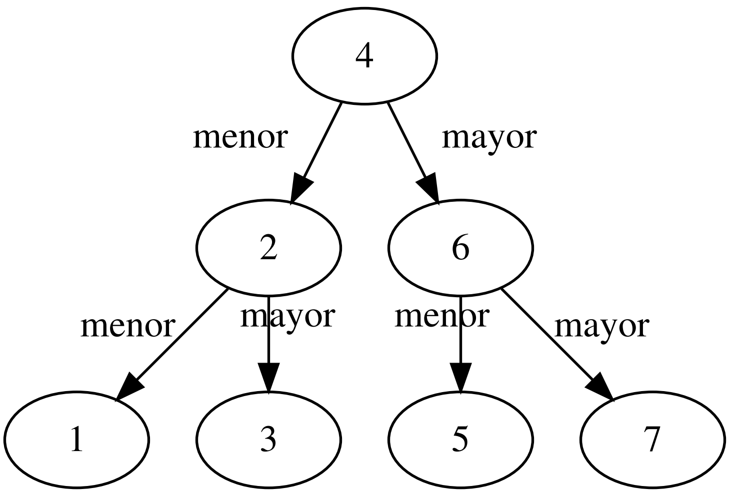
Se adopta la siguiente regla de decisión: Se rechaza $H_E$ si el estudiante contesta correctamente 8 o más preguntas. Entonces el nivel de significación (o error tipo I) de la prueba es igual a

(**A**) 5%. (**B**) 5.47%. (**C**) 10%. (**D**) 15.47% (**E**) 58.87% (**F**) 90%

## Desarrollo (20 puntos)

Voy a jugar a adivinar un número del 1 al 7 (ambos extremos incluidos) en el que está pensando mi amigo Alberto.

Mi estategia va ser empezar diciendo 4 y según si me responde que su número es menor o mayor decir mi siguiente número según este diagrama:




Asumiendo que Alberto elige su número de modo que $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $7$ son equiprobables y llamando $X$ al número de intentos que demoro en adivinar su número:

**Parte 1a. (5 puntos)** Calcule la función de probablilidad de $X$ y su esperanza. Justifique su respuesta.

**Parte 1b. (5 puntos)** Calcule y grafique la función de distribución de $X$. Justifique su respuesta.

**[Continúa en la página siguiente.]**

Luego de jugar varias veces, tengo sospechas de que Alberto no elige su número de forma uniforme. Para decidir si esto es plausible o no decidí registrar el número de intentos que me lleva adivinar su número en varios juegos.

Luego de jugar 49 veces resultó que adiviné de primera 5 veces, en dos intentos 10 veces y en tres intentos 34 veces.

**Parte 2a. (5 puntos)** Diseñe y explique (sin hacer cálculos) un test de hipótesis para decidir si Alberto elige los números con equiprobabilidad. Incluya la hipótesis nula, alternativa, si el test será a una o dos colas, el estadístico que será usado, el nivel del test, y cómo se calculará la región de rechazo. **No realice ninguna cuenta con los datos en esta parte del ejercicio.**

**Parte 2b. (5 puntos)** Aplique el test diseñado a la parte anterior a los datos y explique su conclusión, es decir, si piensa que Alberto está elgiendo los números de forma equiprobable o no.

**No resuelva el ejercicio de desarrollo aquí.**