N^o de prueba	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6
Ej. 7	Ej. 8	Ej. 9	Ej. 10	Des. 1	Des. 2

Importante

- El examen dura 3 horas y 30 minutos.
- Consta de 8 ejercicios múltiple opción de 10 puntos cada uno y uno de desarollo de 20 puntos.
- El estudiante **elegirá 8 preguntas múltiple opción** de las 10, ingresando sus respuestas en el cuadro de respuestas de esta hoja e ingresando una cruz (o X) en las preguntas que decidan no contestar.
- En caso de ingresar más respuestas se corregirán sólo las primeras 8.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.
- El ejericio de desarrollo se entregará en hojas a parte, con nombre, documento, número de prueba y cantidad de hojas entregadas indicado claramente en la parte superior de cada hoja.

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

Z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Ejercicio 1 (10 puntos)

En cierta competencia de fútbol hay 4 equipos que jugarán todos contra todos una única vez. A los efectos de este ejercicio cada encuentro tiene tres resultados posibles: gana un equipo, gana el otro equipo, o empatan.

Asumiendo que los equipos son muy parejos, y por lo tanto todas las combinaciones de resultados del torneo son equiprobables. ¿Cuál es la probabilidad (redondeada a dos cifras significativas) de que alguno de los 4 equipos pierda todos sus partidos?

Sugerencia: Observar que es imposible que más de uno de los equipos pierda todos sus partidos.

(**A**) 0.01 (**B**) 0.04 (**C**) 0.11 (**D**) 0.15 (**E**) 0.21 (**F**) 0.35

Ejercicio 2 (10 puntos)

Hay tres urnas. La urna 1 contiene 1 bolilla roja y una azul, la urna 2 contiene 2 bolillas rojas y una azul, la urna 3 contiene 3 bolillas rojas y una azul.

Se elige una urna al azar y luego una bolilla al azar de esa urna. Si la bolilla obtenida es roja ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna 2?

(**A**) 0.20 (**B**) 0.25 (**C**) 0.33 (**D**) 0.35 (**E**) 0.50 (**F**) 0.90

Ejercicio 3 (10 puntos)

Sean Z_1, Z_2 variables aleatorias normales estandard independientes.

Si las variables (X,Y) definidas por $X = 3Z_1 + 4Z_2, Y = 5Z_1 + 12Z_2$ forman una **normal bi-variada**. ¿Cuál es el número a tal que $Y - aX$ es independiente de X?

Sugerencia: Para normales bi-variadas la independencia es equivalente a correlación nula.

(**A**) 0.34 (**B**) 0.47 (**C**) 0.63 (**D**) 0.89 (**E**) 1.44 (**F**) 2.52

Ejercicio 4 (10 puntos)

La cantidad de minutos en cancha de un jugador de fútbol se puede modelar con una variable aleatoria exponencial. Mirando las estadísticas de juego, Cavani juega en promedio 41 minutos por partido. ¿Cuál es la probabilidad de que Cavani juegue más de un tiempo entero (45 minutos) en un partido?

(**A**) 0 (**B**) 0.33 (**C**) 0.46 (**D**) 0.5 (**E**) 0.66 (**F**) 0.91

Ejercicio 5 (10 puntos)

Antes de irse a la facultad, María se baña en algún momento entre las 8 y las 9 de la mañana con probabilidad uniforme. OSE avisa que entre las 8 y las 9 de la mañana va a comenzar un corte programado que durará 15 minutos (la probabilidad de comienzo del corte también es uniforme). ¿Cuál es la probabilidad de que no haya agua al momento en que María va a entrar a bañarse?

(**A**) 0.22 (**B**) 0.25 (**C**) 0.28 (**D**) 0.5 (**E**) 0.75 (**F**) 0.78

Ejercicio 6 (10 puntos)

Sea X el número de días hábiles en los meses de verano que un equipo de construcción no puede trabajar debido a condiciones meteorológicas. Se sabe que X distribuye de la siguiente manera:

x	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathbb{P}(X=x)$	0.03	0.08	0.15	0.20	0.19	0.16	0.10	0.07	0.02

Calcular la probabilidad de que se pierdan a lo sumo 10 días.

(A) 0.35 **(B)** 0.54 **(C)** 0.46 **(D)** 0.19 **(E)** 0.81 **(F)** 0.65

Ejercicio 7 (10 puntos)

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido. Sea $\hat{\theta}$ el estimador de θ basado en el método de máxima verosimilitud. Indicar la opción correcta.

(A) $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

(B) $\hat{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

(C) $\hat{\theta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

(D) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

(E) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(F) $f_\theta(x)$ no es una función de densidad, por lo que no tiene sentido determinar $\hat{\theta}$.

Ejercicio 8 (10 puntos)

Los asientos desocupados en los vuelos son una pérdida de ingresos para las aerolíneas. Supongamos que una gran compañía aérea desea estimar el número medio μ de asientos desocupados por vuelo durante el último año. Para ello, se seleccionan aleatoriamente los registros de 225 vuelos y se anota el número de asientos desocupados en cada uno de esos vuelos. El promedio de los asientos desocupados en la muestra es de 11.60 asientos con una desviación muestral de 4.10 asientos.

Indicar cuál es la *longitud* de un intervalo de confianza aproximado para la media (μ) de asientos desocupados a nivel 95 %.

(A) 0.45 **(B)** 0.90 **(C)** 1.08 **(D)** 11.60 **(E)** 12.14 **(F)** 11.06

Ejercicio 9 (10 puntos)

Un fabricante de filamentos de nylon dice que al menos el 90 % de sus filamentos deberían de pasar cierto control de calidad. Se tomó una muestra de 100 filamentos y se obtuvo que solo 72 de ellos pasaron dicho control.

Se realiza entonces el siguiente test de hipótesis para $\alpha = 0.05$:

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.90 \\ H_A : p < 0.90 \end{cases}$$

donde p es la probabilidad de que un filamento del fabricante pase el control de calidad. Indique la opción correcta:

(A) La región crítica para este test es $R = \{(x_1,\ldots,x_{100}) : \bar{x}_{100} < 0.90 - \frac{\sqrt{\bar{x}_{100}(1-\bar{x}_{100})}}{10} \times 1.96\}$ y por lo tanto se rechaza H_0 con una confianza del 95 %.

(B) La región crítica para este test es $R = \{(x_1,\ldots,x_{100}) : \bar{x}_{100} < 0.90 - \frac{\sqrt{\bar{x}_{100}(1-\bar{x}_{100})}}{10} \times 1.96\}$ y por lo tanto NO se rechaza H_0 con una confianza del 95 %.

(C) La región crítica para este test es $R = \{(x_1,\ldots,x_{100}) : \bar{x}_{100} < 0.90 - \frac{\sqrt{\bar{x}_{100}(1-\bar{x}_{100})}}{10} \times 1.65\}$ y por lo tanto se rechaza H_0 con una confianza del 95 %.

(D) La región crítica para este test es $R = \{(x_1,\ldots,x_{100}) : \bar{x}_{100} < 0.90 - \frac{\sqrt{\bar{x}_{100}(1-\bar{x}_{100})}}{10} \times 1.65\}$ y por lo tanto NO se rechaza H_0 con una confianza del 95 %.

(E) No se conoce el s_n, por lo tanto no se puede construir una región crítica.

Ejercicio 10 (10 puntos)

Si $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ son variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución como la de X tal que $P(X = -2) = 1/3$, $P(X = 1) = 2/3$ Entonces

(A) $P(\overline{X}_n \geq 0.1)$ es aproximadamente igual a 0.87.

(B) $P(\overline{X}_n \geq 0.1)$ es aproximadamente igual a 0.35.

(C) $P(\overline{X}_n \geq 0.1)$ es aproximadamente igual a 0.5.

(D) $P(-1/4 \leq \overline{X}_n \leq 1/10)$ es aproximadamente igual a 0.23.

(E) $P(-1/4 \leq \overline{X}_n \leq 1/10)$ es aproximadamente igual a 0.35.

(F) $P(-1/4 \leq \overline{X}_n \leq 1/10)$ es aproximadamente igual a 0.72.

Desarrollo (20 puntos)

Sea X una variable aleatoria que toma valores únicamente en el intervalo $[0,1]$ y cuya función de densidad es de la forma $f(x) = cx^2$ si $x \in [0,1]$.

1. Hallar c para que f sea una densidad.
2. Supongamos que sorteamos variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots,$ independientes y con la misma distribución que X *hasta* obtener un valor menor que $\frac{1}{2}$. Sea Z la variable que cuenta la cantidad de variables X_i sorteadas hasta que aparezca dicho valor. Calcular el valor medio de Z.