N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas Ejercicio 1 Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Respuestas Ejercicios Multiple Opción (Ejercicios 2 al 11)

E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10	E. 11

Importante

- El examen dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponde. Tienen un ejercicio verdadero/falso (ejercicio 1) de 20 puntos y 10 ejercicios múltiple opción (ejercicios 2 a 11) de 8 puntos cada uno. El examen es de 100 puntos en total y se aprueba con 60.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.

Ejercicio 1 (Verdadero o falso: 20 puntos)

1. Una combinación lineal de dos funciones de densidad es una función de densidad.
2. Si $X \leq Y$ entonces $Var(X) \leq Var(Y)$
3. Si $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ entonces $X \leq Y$
4. $\overline{X}_n$ es un estimador insesgado de $\mathbb{E}(X_1)$
5. Si X es continua entonces $F_X(0) = \frac{1}{2}$
6. Si B_1 y B_2 son eventos independientes entonces $\mathbb{P}(A|B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(A|B_2)$
7. Si $Var(X^2) = \mathbb{E}(X^2)$ entonces $X = 0$.
8. Para todo suceso A tal que $\mathbb{P}(A) > 0$, se tiene que $\mathbb{P}(A|A^c) = \mathbb{P}(A)$
9. Sean $X_1, \ldots, X_{n+1}$ variables aleatorias, entonces $\overline{X_{n+1}} = \overline{X_n}\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}X_{n+1}$
10. El sesgo de un estimador siempre es positivo o nulo.

Ejercicio 2 (8 puntos)

Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar ($\mathcal{N}(0,1)$) y sea Y una variable aleatoria, independiente de X que toma sólo los valores 1 y -1 con igual probabilidad. A partir de estas dos variables definimos $Z = X.Y$. Entonces:

(**A**) Z es normal estándar, $Cov(X,Z) = 0$ y Z es independiente de X.

(**B**) Z es normal estándar, $Cov(X,Z) = 0$ y Z no es independiente de X.

(**C**) Z no es normal estándar, $Cov(X,Z) = 0$ y Z es independiente de X.

(**D**) Z no es normal estándar, $Cov(X,Z) \neq 0$ y Z es independiente de X.

Ejercicio 3 (8 puntos)

Una moneda tiene probabilidad de cara igual a θ, un parámetro desconocido. Se desea hacer el siguiente test de hipótesis sobre el valor de θ:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0.3 \\ H_A : \theta > 0.3 \end{cases}$$

Suponga que se lanza la moneda 5 veces y se obtienen 3 caras. El p-valor es igual a:

(**A**) 0.324 (**B**) 0.162 (**C**) 0.132 (**D**) 0.030

Ejercicio 4 (8 puntos)

Se considera una población numerosa donde se quiere estimar p, la probabilidad de que una persona presente un consumo de alcohol problemático. Se sabe que aquellos que lo presentan lo niegan si se les pregunta directamente.

Para estimar p se ideó el siguiente procedimiento: de una urna con 5 tarjetas, 2 contienen la pregunta (A)¿usted presenta un consumo de alcohol problemático? y las 3 restantes contienen la pregunta (B) ¿usted es moderado en el consumo de alcohol?.

Luego se toma al azar una muestra de n personas. Suponiendo que cada una es capaz de darse cuenta y asumir en caso de tener un problema de consumo de alcohol. A cada una se le pide que saque una tarjeta de la urna, lea la pregunta y conteste "Sí" o "No", y que luego devuelva la tarjeta a la urna (de esta forma la urna se mantiene siempre con 5 tarjetas). La tarjeta sólo es vista por quien contesta, es decir, el encuestador sólo escucha un "Sí" ó un "No", con lo cual la persona que responde mantiene su privacidad intacta.
Se supone que todos los encuestados siguen rigurosamente las instrucciones.

Suponiendo que de una muestra de 1000 personas, 580 responden "Sí", un estimador de p es:

(**A**) 0.58 (**B**) 0.42 (**C**) 0.10 (**D**) 0.12

Ejercicio 5 (8 puntos)

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria exponencial de parámetro α. Se define la distribución empírica de la muestra

$$F_n(x) = \frac{\#\{X_i \leq x\}}{n},$$

Entonces $\mathbb{E}(F_n(x)) =$

(A) $1 - e^{-\alpha x}$ **(B)** $n(1 - e^{-\alpha x})$ **(C)** $e^{-\alpha x}$ **(D)** $ne^{-\alpha x}$

Ejercicio 6 (8 puntos)

En una planta de elaboración de quesos se toma para control de calidad un queso de la línea de producción cada 30 minutos. Se considera que el queso no pasó el control si pesa más de 8.08 kg o menos de 7.86 kg, y este es rechazado.

Asumiendo que los pesos de los quesos siguen una distribución normal de esperanza 8 kg y desvío estándar 50 gramos, la probabilidad de no rechazar ningún queso durante una jornada de 8 horas es:

(A) 0.057 **(B)** 0.156 **(C)** 0.388 **(D)** 0.612

Ejercicio 7 (8 puntos)

Sean X e Y dos variables aleatorias tales que:

- $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
- La correlación entre X e Y vale $\rho = \frac{1}{4}$.

La probabilidad de que X sea mayor que el doble de Y dado que X es mayor que 0 es:

(A) 0.42 **(B)** 0.58 **(C)** 0.34 **(D)** 0.66

Ejercicio 8 (8 puntos)

Los siguientes datos correponden a una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria Y de la que se sabe $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\beta}$ y $Var(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}$:

7	14	21	28	35

Una estimación de α por el método de los momentos es:

(A) 3.9 **(B)** 4.2 **(C)** 4.5 **(D)** 4.8

Ejercicio 9 (8 puntos)

Sean dos variables aleatorias independientes X, con distribución uniforme en $[0,a]$ e Y, con distribución uniforme en $[0,b]$ tal que $0 < b < 1 < a$. Entonces la probabilidad $\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq 1/3\right) =$.

(A) $\frac{b}{4a}$ **(B)** $\frac{a}{4b}$ **(C)** $\frac{b}{3a}$ **(D)** $\frac{a}{3b}$

Ejercicio 10 (8 puntos)

Un dado balanceado que tiene una cantidad k desconocida de caras. Se arroja el dado 8 veces (cada vez independiente entre si), obteniendo los resultados:

3	1	2	3	3	4	7	4

Una estimación de k por el método de máxima verosimilitud es:

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 7 **(D)** 8

Ejercicio 11 (8 puntos)

La siguiente tabla muestra el resumen de cinco números de las notas de un examen de inglés para una clase con 16 estudiantes

(R):

min	q_i	m	q_s	max
39	45	49	55	59

Considere los tres conjuntos de datos representados por diagramas de tallo y hojas que se muestran a continuación (tallo = decenas, hojas = unidades)

(D_1):

3	9
4	4
4	557799
5	234
5	55689

(D_2):

3	9
4	44
4	5779
5	023334
5	569

(D_3):

3	99
4	4
4	57799
5	233
5	56789

Indicar cuáles de estos conjuntos de datos se corresponden con el resumen numérico (R).

(A) Sólo (D_1)

(B) Sólo (D_3)

(C) Sólo (D_2) y (D_3)

(D) Sólo (D_1) y (D_3)

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Tabla de χ^2

	Probabilidad de cola derecha $P(\chi^2 \geq c)$										
GdL	**.25**	**.20**	**.15**	**.10**	**.05**	**.025**	**.02**	**.01**	**.005**	**.0025**	**.001**
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.32	16.27
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.52
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.45	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59

Tabla de t Student

	Probabilidad de cola derecha $P(t \geq c)$										
GdL	**.25**	**.20**	**.15**	**.10**	**.05**	**.025**	**.02**	**.01**	**.005**	**.0025**	**.001**
1	1.00	1.38	1.96	3.08	6.31	12.71	15.89	31.82	63.66	127.32	318.31
2	0.82	1.06	1.39	1.89	2.92	4.30	4.85	6.96	9.92	14.09	22.33
3	0.76	0.98	1.25	1.64	2.35	3.18	3.48	4.54	5.84	7.45	10.21
4	0.74	0.94	1.19	1.53	2.13	2.78	3.00	3.75	4.60	5.60	7.17
5	0.73	0.92	1.16	1.48	2.02	2.57	2.76	3.36	4.03	4.77	5.89
6	0.72	0.91	1.13	1.44	1.94	2.45	2.61	3.14	3.71	4.32	5.21
7	0.71	0.90	1.12	1.41	1.89	2.36	2.52	3.00	3.50	4.03	4.79
8	0.71	0.89	1.11	1.40	1.86	2.31	2.45	2.90	3.36	3.83	4.50
9	0.70	0.88	1.10	1.38	1.83	2.26	2.40	2.82	3.25	3.69	4.30
10	0.70	0.88	1.09	1.37	1.81	2.23	2.36	2.76	3.17	3.58	4.14

FPP de la binomial $\mathrm{Bin}(5, \theta)$ para varios valores de θ.

x	0	1	2	3	4	5
$\theta = .1$	.590	.328	.073	.008	.000	.000
$\theta = .2$	.328	.410	.205	.051	.006	.000
$\theta = .3$	.168	.360	.309	.132	.028	.002
$\theta = .4$	.078	.259	.346	.230	.077	.010
$\theta = .5$	.031	.156	.313	.313	.156	.031
$\theta = .6$	.010	.077	.230	.346	.259	.078
$\theta = .7$	.002	.028	.132	.309	.360	.168
$\theta = .8$	.000	.006	.051	.205	.410	.328
$\theta = .9$	.000	.000	.008	.073	.328	.590