N^o de prueba	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5
Ej. 6	**Ej. 7**	**Ej. 8**	**Ej. 9**	**Ej. 10**

Importante

- El examen dura 3 horas y 30 minutos.
- Consta de 10 preguntas múltiple opción de 10 puntos cada una y una pregunta de desarollo con dos partes, cada una de las cuales vale 10 puntos.
- El estudiante contestará en total 8 preguntas múltiple opción, ingresando sus respuestas en el cuadro de respuestas de esta hoja.
- En caso de ingresar más respuestas se contarán los puntos sólo de las primeras 8.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.
- El ejericio de desarrollo se entregará en hojas a parte, con nombre, documento, y número de prueba indicado claramente en la parte superior de cada hoja.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Este es un ejercicio de probabilidad combinatoria, i.e. de casos favorables sobre casos posibles.

Se jugarán $\binom{4}{2} = 6$ partidos en total. El espacio muestral Ω (i.e. los casos posibles para el torneo) consiste en asignar uno de 3 resultados posibles a cada partido y por lo tanto hay $\#\Omega = 3^6 = 729$ resultados posibles para el torneo (i.e. casos posibles).

Nombremos $F \subset \Omega$ al conjunto de los casos favorables (i.e. donde algún equipo pierde todos sus partidos). Por definición

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega}.$$

Partimos F en cuatro eventos disjuntos F_1, F_2, F_3, F_4 donde F_i es el evento donde el equipo i-ésimo perdió todos sus partidos. Obtenemos

$$P(F) = P(F_1) + \cdots + P(F_4) = 4P(F_1).$$

Para calcular la probabilidad de F_1 basta con observar que en los tres partidos donde juega 1 se puden dar sólamente 1 de los 3 posibles resultados. En los otros 3 sirve cualquiera de los 3 posibles resultados. Por lo tanto

$$P(F_1) = \frac{\#F_1}{\#\Omega} = \frac{1^3 \times 3^3}{3^6} = \frac{1}{3^3}.$$

De donde $P(F) = \frac{4}{3^3} \approx 0.15$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Este es un ejercicio de probabilidad condicional. En particular de la fórmula de Bayes.

Llamemos R al evento de que la bolilla extraída es roja, y U_1, U_2, U_3 a los eventos de que se eligió la urna $1,2$ o 3 respectivamente.

Se pide calcular

$$\begin{aligned} P(U_2|R) &= \frac{P(R|U_2)P(U_2)}{P(R|U_1)P(U_1) + P(R|U_2)P(U_2) + P(R|U_3)P(U_3)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}} \approx 0.35 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Este es un ejercicio sobre variables normales bi-variadas.

Calculamos la covarianza:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y - aX) &= \mathrm{Cov}(3Z_1 + 4Z_2, (5-3a)Z_1 + (12-4a)Z_2) \\ &= 3(5-3a) + 4(12-4a) \\ &= 63 - 25a. \end{aligned}$$

Igualando a 0 se se obtiene $a = 63/25 = 2.52$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Como los minutos jugados en cancha (llamémosle X) siguen una distribución exponencial, lo primero que tenemos que hacer es calcular λ. Como el promedio de minutos ugados es 41, entonces $\lambda = 1/41$.

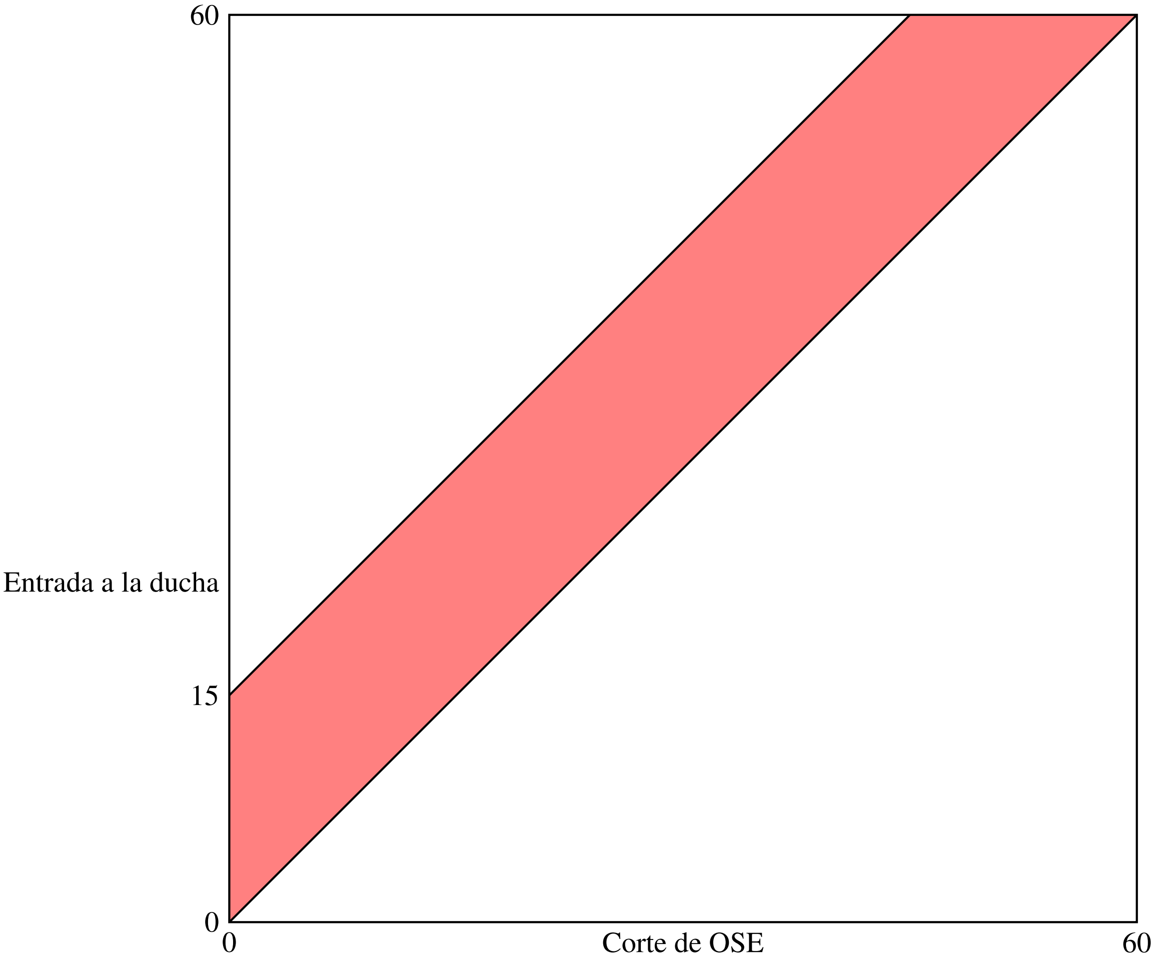
Ahora podemos calcular la probabilidad que se pide:

$P(X > 45) = 1 - P(X \leq 45) = 1 - (1 - e^{-\lambda 45} = e^{-45/41} \approx 0.33$

Ejercicio 5 (10 puntos)

La zona pintada de rojo son los casos favorables, ya que representa el momento durante el cual puede estar cortada el agua. Por lo tanto, la probabilidad es la resta de las áreas de los triángulos (haciendo el cálculo suponiendo un cuadrado de lado 1).

$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2} = 0.21875$



Ejercicio 6 (10 puntos)

Es $\mathbb{P}(X \geq 10) = 1 - (\mathbb{P}(X = 11) + \mathbb{P}(X = 12) + \mathbb{P}(X = 13) + \mathbb{P}(X = 14)) = 0.65.$

Ejercicio 7 (10 puntos)

$f_\theta(x)$ es una función de densidad ya que $\int_0^1 f_\theta(x)dx = x^{\frac{1}{\theta}}\Big|_0^1 = 1$ sin importar el valor de $\theta > 0$.

Sea $L(\theta) = L(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$ la función de verosimilitud. Entonces:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}.$$

Como log es una función creciente, $L(\theta)$ alcanza el máximo en el mismo θ que $h(\theta) = \log L(\theta)$ y $h(\theta) = -n\log(\theta) + \frac{1-\theta}{\theta} \sum_i \log(x_i)$. Buscamos entonces los puntos críticos de

$h(\theta)$:

$$h'(\theta) = -\frac{1}{\theta}\left(n + \frac{1}{\theta}\sum_i \log(x_i)\right).$$

Como $\theta > 0$, $h'(\theta) = 0 \Leftrightarrow n + \frac{1}{\theta}\sum_i \log(x_i) \Leftrightarrow \theta = -\frac{1}{n}\sum_i \log(x_i)$ y es el único punto crítico.

Ejercicio 8 (10 puntos)

Tenemos que $\bar{x}_n = 11.6$ y $s_n = 4.1$. Un intervalo de confianza aproximado a nivel $1-\alpha$ para μ es:

$$I_{1-\alpha} = [\bar{x}_n \pm k] \text{ con } k = \frac{s_n}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Luego, se pide el valor de $2k$ con $n = 225$, $s_n = 4.1$, $\alpha = 0.05$, $z_{0.975} = 1.96$. Entonces $k = 0.54$ y la longitud pedida es $2k = 1.08$.

Ejercicio 9 (10 puntos)

Queremos testear $\begin{cases} H_0: p \geq 0.90 \\ H_A: p < 0.90 \end{cases}$. Notar que p representa la esperanza de una variable aleatoria X Bernoulli(p). Si

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el filamento } i \text{ pasa el control de calidad} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

entonces tenemos $X_1, \dots X_{100} i.i.d. \sim Ber(p)$ y sabemos que $x_1 + \cdots + x_{100} = 72$, por lo tanto $\bar{x}_{100} = 0.72$.

La región crítica para este test es:

$$R = \{(x_1, \dots, x_{100}) : \bar{x}_{100} < 0.90 - \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \times z_{1-\alpha}\} \approx R = \{(x_1, \dots, x_{100}) : \bar{x}_{100} < 0.90 - \frac{\sqrt{\bar{x}_{100}(1-\bar{x}_{100})}}{10} \times 1.65\}$$

ya que la varianza de una variable Bernoulli es $\sigma^2 = p(1-p)$ y estimamos p por $\bar{x}_{100}$.

Como $\bar{x}_{100} = 0.72 < 0.90 - \frac{\sqrt{0.72(1-0.72)}}{10} \times 1.65 = 0.83$, la muestra cae en la región crítica y rechazamos H_0 con una confianza del 95 %.

Ejercicio 10 (10 puntos)

$E(X) = -2 \times 1/3 + 2/3 = 0$, $V(X) = E(X^2) = 4 \times 1/3 + 2/3 = 2$. Aplicando el teorema central del límite tenemos que $\overline{X}_n$ distribuye aproximadamente $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = N(0, 0.02)$ Entonces $P(-1/4 \leq Y \leq 1/10) \sim \phi(\frac{1/10}{\sqrt{0.02}}) - \phi(\frac{-1/4}{\sqrt{0.02}}) = 0.7217$.

Desarrollo (20 puntos)

Sea X una variable aleatoria que toma valores únicamente en el intervalo $[0,1]$ y cuya función de densidad es de la forma $f(x) = cx^2$ si $x \in [0,1]$.

1. Planteamos:
$$1 = \int_0^1 f(x)dx = c\int_0^1 x^2 dx = \frac{c}{3} \Leftrightarrow c = 3.$$

2. Sea $Z = \text{mín}\{n : X_n < \frac{1}{2}\}$, entonces Z distribuye como una variable Geométrica $Z \sim Geo(p)$ con $p = \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{8}$. Luego, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} = 8$.