Versión A

Respuestas Ejercicio 1 Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	V	V	F	F	F	V	F

Respuestas Ejercicios Multiple Opción (Ejercicios 2 al 11)

E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10	E. 11
A	D	D	B	A	A	B	B	A	C

Versión B

Respuestas Ejercicio 1 Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	F	F	V	F	F	V	V

Respuestas Ejercicios Multiple Opción (Ejercicios 2 al 11)

E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10	E. 11
A	B	A	A	B	C	D	A	D	B

Ejercicio 1 (Verdadero o falso: 20 puntos)

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
2. Si X es una variable aleatoria continua entonces du densidad f_X cumple $f_X(x) \in [0,1] \forall x$
3. El $p-$valor es la probabilidad de no rechazar la hipótesis alternativa sabiendo que la hipótesis nula es verdadera
4. Si $X \sim U[2,4]$ entonces $3X \sim U[6,12]$
5. Si (X,Y) es normal bivariado estándar con correlación ρ entonces $\mathbb{E}(Y|X=x) = \rho x$
6. Puede ocurrir que $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A)$
7. Si $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$ entonces $XY \sim \exp(\lambda + \mu)$
8. Si X es continua, la mediana m_X y, cuando existe, la media $\mathbb{E}(X) = \mu$ coinciden.
9. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ entonces $\mathbb{E}(X(X-1)) = Var(X)$
10. $ECM(\widehat{\theta}) = Var(\widehat{\theta}) + \text{Sesgo}(\widehat{\theta})$

Ejercicio 2 (8 puntos)

Una moneda tiene probabilidad θ de salir cara. Se realizaron 100 ensayos independientes en los cuales la moneda fue lanzada hasta obtener cara. La cantidad de lanzamientos (incluyendo el último en el cual se obtiene cara) fueron los siguientes:

Lanzamientos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
# Ensayos	49	22	16	6	1	1	2	1	1	1	100

Por ejemplo, la primer columna indica que en 49 ensayos se obtuvo cara en el primer lanzamiento.

Dar una estimación de θ basada en el método de máxima verosimilitud.

(A) 0.46 **(B)** 2.17 **(C)** 1.17 **(D)** 0.85

Solución: Llamemos X a la cantidad de lanzamientos necesarios para obtener cara en una moneda con probabilidad θ de salir cara. Entonces $X \sim \text{Geom}(\theta)$ y su fpp está dada por

$$P(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Sea $X_1, \ldots, X_n$ un muestreo iid de X. La verosimilitud viene dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{X_i - 1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)}.$$

Tomando logaritmo tenemos

$$\ell(\theta) = n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1) \ln(1-\theta).$$

Derivando e igualando a cero llegamos a la ecuación

$$\frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)}{1-\theta} = 0$$

de donde deducimos que $\hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^{n} X_i = 1/\bar{X}_n$.

En nuestro caso el promedio vale $\bar{X}_n = 2.17$ de donde $\hat{\theta} = 0.46$.

Ejercicio 3 (8 puntos)

Se quiere estudiar el ingreso promedio de los estudiantes de ingeniería, para esto se realiza un muestreo aleatorio para consultar el ingreso. El objetivo es, con una probabilidad superior al 95 %, no errarle al verdadero valor del ingreso promedio por más de \$75, sabiendo que el desvío estándar es menor a \$250.

Sea n_1 la mínima cantidad de gente calculada con la desigualdad de Chebyshev y n_2 la mínima cantidad de gente calculada con el TCL.

Entonces $n_1 + n_2$ es:

(A) 42 **(B)** 55 **(C)** 253 **(D)** 266

Solución: Se busca lo siguiente:

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 75) \geq 0.95 \implies P(|\overline{X} - \mu| > 75) < 0.05$$

Con Chebyshev:

$$P(|\overline{X}-\mu|>75)<\frac{\sigma^2}{n\cdot 75^2}$$

Por lo que $0.05>\frac{250^2}{n\cdot 75^2}$, entonces $n_1=223$.

Con TCL:

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}-\mu|>75) &= P(\overline{X}-\mu>75)+P(\overline{X}-\mu<-75)\\ &= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{75}{\sigma/\sqrt{n}}\right)+P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{-75}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\\ &= 2\left[1-\phi\left(\frac{75}{250/\sqrt{n}}\right)\right]\leq 0.05\end{aligned}$$

Por lo que $\left(\frac{75}{250/\sqrt{n}}\right)\geq 1.96$, entonces $n_2=43$.

Por último, $n_1+n_2=266$

Ejercicio 4 (8 puntos)

Se consideran dos variables aleatorias X e Y, que toman los valores 1, 2 y 3 cada una con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
1	0.1	0.1	a
2	c	0.08	0.24
3	0.02	b	0.06

Sabiendo que $a>0.25$ y que $b<c<a$ hallar la suma $a+b-c$ sabiendo que X e Y son independientes.

(A) 0.44 **(B)** 0.54 **(C)** 0.30 **(D)** 0.24

Solución:

- El valor de a lo obtenemos de la ecuación

  $$a=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3\}=(0.2+a).(0.3+a)$$

  Eso da como resultado: $a=0,3$ (teniendo en cuenta los dos posibles valores y que $a>0.25$).

- El valor de b lo obtenemos de la ecuación

  $$b=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=(0.08+b)(0.18+b).$$

  Eso da como resultado: $b=0,02$ (teniendo en cuenta los dos posibles valores y que $b<a$).

- El valor de c lo obtenemos por diferencia, sabiendo que todos los valores de la tabla tienen que sumar 1 (suma en la que incluimos los valores hallados de a y b). De esa forma obtenemos $c = 0.08$.
- Sustituyendo tenemos que $a+b-c = 0.24$.

Ejercicio 5 (8 puntos)

Un entrenador mide el tiempo que tarda un atleta en correr 100m llanos. Para esto utiliza un cronómetro, que toma medidas independientes que se distribuyen como $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$.

El valor de σ^2 es conocido al ser vinculado con el tiempo de reacción humana (al detener el cronómetro), y vale $\sigma^2 = 0.25^2$. El valor de μ es desconocido y es el valor “exacto"que tardó el atleta en correr los 100m llanos.

Para ver si está en condiciones de romper su record, el entrenador toma 5 medidas independientes y hace el siguiente test de Hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu > 11.54 \\ H_A : \mu < 11.54 \end{cases}$$

Si los datos medidos son:

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
11.57	11.43	11.35	11.12	11.29

¿Cuánto vale el p-valor?

(**A**) 0.284 (**B**) 0.046 (**C**) 0.093 (**D**) Ninguno de los anteriores.

Solución: Como se conoce que los datos tienen una distribución normal de varianza conocida, el test que corresponde hacer es el test Z (exacto).

El estadístico es $\bar{Z} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$.

Para hallar el p-valor, se toman las siguientes consideraciones:

- El test es a una cola, y valores “extremos"del estadísticos son valores más pequeños (a favor de HA).
- La hipótesis alternativa es compuesta y se compone por $\mu < 11.54$.

Luego el p-valor es:

$p-valor = sup_{\mu \in H_0}\{P(\bar{Z} < \bar{Z}_{obs})\} = sup_{\mu > 11.54}\Phi(\bar{Z}_{obs})$. El supremo se dá para el menor valor posible de μ, es decir $\mu = 11.54$. Evaluando, resulta que: $\bar{Z}_{obs} = -1.68$ entonces $\Phi(\bar{Z}_{obs}) = 0.046$.

Ejercicio 6 (8 puntos)

La altura de un triangulo A es una v.a. uniforme en $[0,1]$ y su base B es también uniforme en $[0,2]$. Se tiran n veces de manera independiente e independientes entre si, la altura A y la base B de un triángulo. Esto es se obtienen n pares

$$(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n),$$

de tal forma que (A_j, B_j) y (A_i, B_i) son independientes si $j \neq i$ y además A_i es independiente de B_i para todo i. Para n grande, de manera aproximada, el área promedio de los triángulos es:

(A) 0.25 **(B)** 0.5 **(C)** 1 **(D)** 2

Solución: Denotamos por $\gamma(\Delta_i)$ el área del triángulo con altura A_i y base B_i de esa forma $\gamma_i = \frac{1}{2} A_i B_i$. Por independencia se tiene que

$$\mathbb{E}(\gamma(\Delta_i)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(A_i)\mathbb{E}(B_i) = \frac{1}{8} \times 1 \times 2 = 0.25$$

Ahora bien por la LGN se tiene que

$$\frac{1}{n}(\gamma(\Delta_1) + \gamma(\Delta_2) + \ldots + \gamma(\Delta_n)) \approx 0.25$$

Ejercicio 7 (8 puntos)

En una represa se registró para 5 eventos de precipitación extremos de valor (medidos en mm/día) 64, 72, 76, 88 y 91, la cota de la superficie del agua en la represa con alturas (en m) de 36, 38, 35, 40 y 45.

¿Cuánto se espera que sea la diferencia de cotas entre un evento de precipitación de 47 mm y otro de 65 mm?

(A) $5,14$ m **(B)** $1,30$ m **(C)** $4,66$ m **(D)** $6,84$ m

Solución: Calculamos las varianzas: $S_{lluvias} = 11,23$ mm/día $S_{cotas} = 3,96$ y la correlacón $\rho = 0,8099$
La diferencia de cotas entre eventos estimada se puede calcular como $\rho \times \frac{S_{cotas}}{S_{lluvias}} \times (65 - 47)$ ya que $\rho \times \frac{S_{cotas}}{S_{lluvias}}$ es la pendiente de la recta de regresión. con lo que llegamos a un valor de diferencia de 5,14 metros.

Ejercicio 8 (8 puntos)

Un comerciante sin calculadora desea redondear los precios de sus artículos al entero más cercano de forma que la unidad mínima sea la moneda de \$1. Así por ejemplo si un artículo cuesta \$6.49 su redondeo será \$6, y si cuesta \$6.99 su redondeo será \$7.

De su registro histórico el comerciante sabe que la distribución de cifras decimales de sus precios es

Cifra decimal	.00	.49	.90	.99
Probabilidad	0.1	0.15	0.4	0.35

Sea P el precio de un artículo y R su precio redondeado. Hallar la esperanza $\mathrm{E}(D)$ y la varianza $\mathrm{Var}(D)$ de la diferencia $D = R - P$.

(**A**) $\mathrm{E}(D) = 0.215$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.052$.

(**B**) $\mathrm{E}(D) = -0.03$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.039$.

(**C**) $\mathrm{E}(D) = 0.215$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.227$.

(**D**) $\mathrm{E}(D) = -0.03$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.198$.

Solución: La fpp de D es

Valor de D	0.00	−0.49	0.10	0.01
Probabilidad	0.1	0.15	0.4	0.35

Luego, la esperanza es

$$\mathrm{E}(D) = 0.00 \times 0.1 - 0.49 \times 0.15 + 0.10 \times 0.4 + 0.01 \times 0.35 = -0.03.$$

Y la varianza es

$$\mathrm{Var}(D) = (-0.03)^2 \times 0.1 + (-0.52)^2 \times 0.15 + (0.07)^2 \times 0.4 + (-0.02)^2 \times 0.35 = 0.039$$

Ejercicio 9 (8 puntos)

El agua en un embalse es una variable aleatoria con densidad (en metros), siendo k constante:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ k \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{3}} & x > 0 \end{cases}$$

Si el agua supera la marca de los 21 metros se produce una inundación. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una inundación?

(**A**) 0.0030 (**B**) 0.0073 (**C**) 0.9927 (**D**) 0.9970

Solución: Primero integramos la función de densidad entre 0 e infinito e igualamos a 1 para hallar k.

$$\int_0^\infty k \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{3}}\, dx = 9$$

$$k = \frac{1}{9}$$

Luego integramos la función de densidad entre 21 e infinito para hallar la probabilidad.

$$\mathbb{P}(X > 21) = \int_{21}^\infty \frac{x}{9} \cdot e^{-\frac{x}{3}}\, dx = \frac{8}{e^7} \approx 0.0073$$

Ejercicio 10 (8 puntos)

Se consideran dos variables normales independientes X e Y tales que:

- $\mathbb{E}(2X + Y + 1) = 11$
- La densidad de Y es simétrica respecto de $x = 6$

Entonces $\mathbb{P}(X \geq 2, Y \leq 6) =$

(**A**) 0.25 (**B**) 0.4 (**C**) mayor que 0.6 (**D**) 0.5

Solución Si la densidad de Y es simétrica respecto de $x = 6$ entonces $\mathbb{E}(Y) = 6$ y que por la simétría de la densidad normal $\mathbb{P}(Y \geq 6) = 0.5$. Luego de $\mathbb{E}(2X + Y + 1) = 11$ sacamos que $\mathbb{E}(X) = 2$ y por lo tanto $\mathbb{P}(X \geq 2) = 0.5$. Entonces

$$\mathbb{P}(X \geq 2, Y \leq 6) = \mathbb{P}(X \geq 2)\mathbb{P}(Y \leq 6) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

Ejercicio 11 (8 puntos)

A un grupo de estudiantes de probabilidad y estadística se les toma un examen al comienzo del curso y otro al final. Se asume que las notas tienen distribución normal bi-variada de parámetros:

	Media	Desvío
1er examen	50	15
2do examen	70	8
Correlación	0.5	

Si la nota en el primer parcial es mayor o igual a cero ¿Qué porcentaje de estudiantes sacó en el segundo examen al menos 5 puntos más que en el primero?

(**A**) Entre 60 % y 70 %

(**B**) Entre 70 % y 80 %

(**C**) Entre 80 % y 90 %

(**D**) Mayor a 90 %

Solución: Sea (X,Y) una normal bi-variada donde X tiene media 50 y desvío 15, mientras que Y tiene media 70 y desvío 8, y la correlación es $\frac{1}{2}$.

El par (U,V) donde $U = \frac{X-50}{15}$ y $V = \frac{Y-70}{8}$ es normal estandard con correlación $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto existe Z normal estandard independiente de U tal que $V = \frac{1}{2}U + \frac{\sqrt{3}}{2}Z$.

Usando esto se obtiene

$$\begin{aligned}
P(X+5 \leq Y) &= P(15U + 50 + 5 \leq 8V + 70) \\
&= P(15U \leq 8V + 15) \\
&= P\left(15U \leq 4U + 4\sqrt{3}Z + 15\right) \\
&= P\left(11U - 4\sqrt{3}Z \leq 15\right)
\end{aligned}$$

La variable $W = 11U - 4\sqrt{3}Z$ es normal de esperanza 0 y varianza $169 = 13^2$. Obtenemos

$$P(W \leq 15) = P\left(\frac{W}{13} \leq 15/13\right) = \Phi(15/13) \approx 0.87.$$