N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas Ejercicio 1 Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Respuestas Ejercicios Multiple Opción (Ejercicios 2 al 11)

E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10	E. 11

Importante

- El examen dura 3h.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponde. Tienen un ejercicio verdadero/falso (ejercicio 1) de 20 puntos y 10 ejercicios múltiple opción (ejercicios 2 a 11) de 8 puntos cada uno. El examen es de 100 puntos en total y se aprueba con 60.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.

Ejercicio 1 (Verdadero o falso: 20 puntos)

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
2. Si X es una variable aleatoria continua entonces du densidad f_X cumple $f_X(x) \in [0,1]\, \forall x$
3. El $p-$valor es la probabilidad de no rechazar la hipótesis alternativa sabiendo que la hipótesis nula es verdadera
4. Si $X \sim U[2,4]$ entonces $3X \sim U[6,12]$
5. Si (X,Y) es normal bivariado estándar con correlación ρ entonces $\mathbb{E}(Y|X=x) = \rho x$
6. Puede ocurrir que $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A)$
7. Si $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$ entonces $XY \sim \exp(\lambda + \mu)$
8. Si X es continua, la mediana m_X y, cuando existe, la media $\mathbb{E}(X) = \mu$ coinciden.
9. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ entonces $\mathbb{E}(X(X-1)) = Var(X)$
10. $ECM(\widehat{\theta}) = Var(\widehat{\theta}) + \text{Sesgo}(\widehat{\theta})$

Ejercicio 2 (8 puntos)

Una moneda tiene probabilidad θ de salir cara. Se realizaron 100 ensayos independientes en los cuales la moneda fue lanzada hasta obtener cara. La cantidad de lanzamientos (incluyendo el último en el cual se obtiene cara) fueron los siguientes:

Lanzamientos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
# Ensayos	49	22	16	6	1	1	2	1	1	1	100

Por ejemplo, la primer columna indica que en 49 ensayos se obtuvo cara en el primer lanzamiento.

Dar una estimación de θ basada en el método de máxima verosimilitud.

(**A**) 0.46 (**B**) 2.17 (**C**) 1.17 (**D**) 0.85

Ejercicio 3 (8 puntos)

Se quiere estudiar el ingreso promedio de los estudiantes de ingeniería, para esto se realiza un muestreo aleatorio para consultar el ingreso. El objetivo es, con una probabilidad superior al 95 %, no errarle al verdadero valor del ingreso promedio por más de \$75, sabiendo que el desvío estándar es menor a \$250.

Sea n_1 la mínima cantidad de gente calculada con la desigualdad de Chebyshev y n_2 la mínima cantidad de gente calculada con el TCL.

Entonces $n_1 + n_2$ es:

(**A**) 42 (**B**) 55 (**C**) 253 (**D**) 266

Ejercicio 4 (8 puntos)

Se consideran dos variables aleatorias X e Y, que toman los valores 1, 2 y 3 cada una con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
1	0.1	0.1	a
2	c	0.08	0.24
3	0.02	b	0.06

Sabiendo que $a > 0.25$ y que $b < c < a$ hallar la suma $a + b - c$ sabiendo que X e Y son independientes.

(**A**) 0.44 (**B**) 0.54 (**C**) 0.30 (**D**) 0.24

Ejercicio 5 (8 puntos)

Un entrenador mide el tiempo que tarda un atleta en correr $100m$ llanos. Para esto utiliza un cronómetro, que toma medidas independientes que se distribuyen como $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$.

El valor de σ^2 es conocido al ser vinculado con el tiempo de reacción humana (al detener el cronómetro), y vale $\sigma^2 = 0.25^2$. El valor de μ es desconocido y es el valor “exacto"que tardó el atleta en correr los $100m$ llanos.

Para ver si está en condiciones de romper su record, el entrenador toma 5 medidas independientes y hace el siguiente test de Hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu > 11.54 \\ H_A : \mu < 11.54 \end{cases}$$

Si los datos medidos son:

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
11.57	11.43	11.35	11.12	11.29

¿Cuánto vale el p-valor?

(**A**) 0.284 (**B**) 0.046 (**C**) 0.093 (**D**) Ninguno de los anteriores.

Ejercicio 6 (8 puntos)

La altura de un triangulo A es una v.a. uniforme en $[0,1]$ y su base B es también uniforme en $[0,2]$. Se tiran n veces de manera independiente e independientes entre si, la altura A y la base B de un triángulo. Esto es se obtienen n pares

$$(A_1,B_1),\ldots,(A_n,B_n),$$

de tal forma que (A_j,B_j) y (A_i,B_i) son independientes si $j \neq i$ y además A_i es independiente de B_i para todo i. Para n grande, de manera aproximada, el área promedio de los triángulos es:

(**A**) 0.25 (**B**) 0.5 (**C**) 1 (**D**) 2

Ejercicio 7 (8 puntos)

En una represa se registró para 5 eventos de precipitación extremos de valor (medidos en mm/día) 64, 72, 76, 88 y 91, la cota de la superficie del agua en la represa con alturas (en m) de 36, 38, 35, 40 y 45.

¿Cuánto se espera que sea la diferencia de cotas entre un evento de precipitación de 47 mm y otro de 65 mm?

(**A**) $5,14$ m (**B**) $1,30$ m (**C**) $4,66$ m (**D**) $6,84$ m

---

Ejercicio 8 (8 puntos)

Un comerciante sin calculadora desea redondear los precios de sus artículos al entero más cercano de forma que la unidad mínima sea la moneda de \$1. Así por ejemplo si un artículo cuesta \$6.49 su redondeo será \$6, y si cuesta \$6.99 su redondeo será \$7.

De su registro histórico el comerciante sabe que la distribución de cifras decimales de sus precios es

Cifra decimal	.00	.49	.90	.99
Probabilidad	0.1	0.15	0.4	0.35

Sea P el precio de un artículo y R su precio redondeado. Hallar la esperanza $\mathrm{E}(D)$ y la varianza $\mathrm{Var}(D)$ de la diferencia $D = R - P$.

(**A**) $\mathrm{E}(D) = 0.215$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.052$.

(**B**) $\mathrm{E}(D) = -0.03$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.039$.

(**C**) $\mathrm{E}(D) = 0.215$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.227$.

(**D**) $\mathrm{E}(D) = -0.03$ y $\mathrm{Var}(D) = 0.198$.

Ejercicio 9 (8 puntos)

El agua en un embalse es una variable aleatoria con densidad (en metros), siendo k constante:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ k \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{3}} & x > 0 \end{cases}$$

Si el agua supera la marca de los 21 metros se produce una inundación. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una inundación?

(**A**) 0.0030 (**B**) 0.0073 (**C**) 0.9927 (**D**) 0.9970

Ejercicio 10 (8 puntos)

Se consideran dos variables normales independientes X e Y tales que:

- $\mathbb{E}(2X + Y + 1) = 11$
- La densidad de Y es simétrica respecto de $x = 6$

Entonces $\mathbb{P}(X \geq 2, Y \leq 6) =$

(**A**) 0.25 (**B**) 0.4 (**C**) mayor que 0.6 (**D**) 0.5

Ejercicio 11 (8 puntos)

A un grupo de estudiantes de probabilidad y estadística se les toma un examen al comienzo del curso y otro al final. Se asume que las notas tienen distribución normal bi-variada de parámetros:

	Media	Desvío
1er examen	50	15
2do examen	70	8
Correlación	0.5	

Si la nota en el primer parcial es mayor o igual a cero ¿Qué porcentaje de estudiantes sacó en el segundo examen al menos 5 puntos más que en el primero?

(**A**) Entre 60 % y 70 %

(**B**) Entre 70 % y 80 %

(**C**) Entre 80 % y 90 %

(**D**) Mayor a 90 %

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Tabla de χ^2

	Probabilidad de cola derecha $P(\chi^2 \geq c)$										
GdL	**.25**	**.20**	**.15**	**.10**	**.05**	**.025**	**.02**	**.01**	**.005**	**.0025**	**.001**
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.32	16.27
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.52
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.45	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59

Tabla de t Student

	Probabilidad de cola derecha $P(t \geq c)$										
GdL	**.25**	**.20**	**.15**	**.10**	**.05**	**.025**	**.02**	**.01**	**.005**	**.0025**	**.001**
1	1.00	1.38	1.96	3.08	6.31	12.71	15.89	31.82	63.66	127.32	318.31
2	0.82	1.06	1.39	1.89	2.92	4.30	4.85	6.96	9.92	14.09	22.33
3	0.76	0.98	1.25	1.64	2.35	3.18	3.48	4.54	5.84	7.45	10.21
4	0.74	0.94	1.19	1.53	2.13	2.78	3.00	3.75	4.60	5.60	7.17
5	0.73	0.92	1.16	1.48	2.02	2.57	2.76	3.36	4.03	4.77	5.89
6	0.72	0.91	1.13	1.44	1.94	2.45	2.61	3.14	3.71	4.32	5.21
7	0.71	0.90	1.12	1.41	1.89	2.36	2.52	3.00	3.50	4.03	4.79
8	0.71	0.89	1.11	1.40	1.86	2.31	2.45	2.90	3.36	3.83	4.50
9	0.70	0.88	1.10	1.38	1.83	2.26	2.40	2.82	3.25	3.69	4.30
10	0.70	0.88	1.09	1.37	1.81	2.23	2.36	2.76	3.17	3.58	4.14

FPP de la binomial $\mathrm{Bin}(5, \theta)$ para varios valores de θ.

x	0	1	2	3	4	5
$\theta = .1$	.590	.328	.073	.008	.000	.000
$\theta = .2$	.328	.410	.205	.051	.006	.000
$\theta = .3$	.168	.360	.309	.132	.028	.002
$\theta = .4$	.078	.259	.346	.230	.077	.010
$\theta = .5$	.031	.156	.313	.313	.156	.031
$\theta = .6$	.010	.077	.230	.346	.259	.078
$\theta = .7$	.002	.028	.132	.309	.360	.168
$\theta = .8$	.000	.006	.051	.205	.410	.328
$\theta = .9$	.000	.000	.008	.073	.328	.590