Examen Probabilidad y Estadstica, 23 de julio de 2021.
Letra y solución.

Ejercicio 1

Durante las horas pico la probabilidad de ser atendido telefónicamente en una línea de consulta es de 0.05. Se sabe que si una persona realiza n llamadas, es atendido al menos una vez con una probabilidad de 0.8062885.
¿Cuántas llamadas realizó?

Ejercicio 2

Se elije un número al azar X en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ de manera uniforme, y se arma un bolillero con X bolillas rojas y $10 - X$ bolillas negras. Se extrae luego una bolilla al azar del bolillero. Si la bolilla extraída es roja, calcular la probabilidad de que el bolillero contuviese exactamente 3 bolillas rojas.

Ejercicio 3

Se desea realizar un estudio a 60 personas nacidas en Uruguay. Para ello, se sortearán personas al azar y se les preguntará si son nacidos en Uruguay hasta alcanzar el total de 60 personas. Se sabe que el 75 % de las personas son nacidas en Uruguay.
Calcular la probabilidad aproximada de que tengamos que preguntarle la nacionalidad al menos a 80 personas.

Ejercicio 4

El tiempo en minutos que demora en pasar un ómnibus por determinada parada una vez que una persona llega a la misma se comporta de acuerdo a la siguiente densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{36} & si \quad 0 < x < 6 \\ \frac{1}{3} - \frac{x}{36} & si \quad 6 < x < 12 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Calcular el valor de α para que con probabilidad 0.125 el tiempo de espera sea superior a α.

Ejercicio 5

Una máquina produce alambre de cobre de 1 mm de diámetro. Se tomó una muestra de la producción de alambres de cobre de los cuales se obtuvieron las siguientes medidas.

1,030 1,042 0,990 1,010 1,032 0,970 0,980 0,975 1,015 0,997

Sabiendo que el diámetro de un alambre elegido al azar dentro de la producción está normalmente distribuido y que $[a, b]$ es un intervalo de confianza al 95% para el diámetro promedio, calcular el valor de $10b - a$.

Ejercicio 6

A partir de una muestra iid $X_1, X_2, ..., X_{49}$ de una variable $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, se plantea la prueba de hipótesis: $H_0 : \lambda = 2$ versus $H_1 : \lambda = 3$ para la que se considera la siguiente región crítica:

$$RC = \{\overline{X}_{49} \geq 2.37\}.$$

Si α es el nivel de significación de la prueba y β la probabilidad del error de tipo II.
Calcular aproximadamente el valor de $\alpha + \beta$.

Ejercicio 7

Se consideran dos variables aleatorias X e Y, que toman los valores $1, 2$ y 3 cada una con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
1	0.02	0.02	a
2	c	0.06	0.18
3	0.12	b	0.36

Se sabe que X e Y son independientes y que tanto a como b como c son menores que 0.2.
Hallar el valor de $a + b - c$.

Ejercicio 8

Si X es una variable aleatoria discreta cuya funcin de probabilidad puntual depende de un parámetro θ desconocido tal que

$$0 \leq \theta \leq 1$$

viene dada por $p_X(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{3} & si \quad x = 0 \\ \frac{2\theta}{3} & si \quad x = 1 \\ \frac{1-\theta}{3} & si \quad x = 2 \\ \frac{2(1-\theta)}{3} & si \quad x = 3 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$ A partir de una muestra iid de dicha variable se obtuvo $3, 1, 1, 2, 1, 0$.

Hallar la estimación máximo verosímil de θ.

Solución

Ejercicio 1

Definimos $X =$"cantidad de llamadas que son atendidas entre las n", entonces $X \sim \text{Bin}(n, p = 0.05)$.

Sabemos que

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0.95^n = 0.8062885.$$

Despejando n, obtenemos

$$n = 32.$$

Ejercicio 2

Si le llamamos R al suceso "la bolilla extraída es roja", entonces

$$P(X = 3/R) = \frac{P(\{X = 3\} \cap R)}{P(R)} =$$

$$\frac{0.3 \times \frac{1}{11}}{\frac{1}{11}(0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7 + 0.8 + 0.9 + 1)} = 0.0545.$$

Ejercicio 3

Definimos $X =$"cantidad de personas consultadas hasta encontrar la número 60 en haber nacido en Uruguay". Entonces $X \sim \text{BinNeg}(k = 60, p = 0.75)$. Como toda $\text{BinNeg}(k, p)$ puede expresarse como $X_1 + X_2 + ... + X_k$ siendo $X_i \sim \text{Geo}(p)$ independientes si k es grande es posible aproximar por teorema central del límite la X por una $N(\mu, \sigma^2)$ siendo $\mu = \frac{k}{p} = 80$, $\sigma^2 = \frac{k(1-p)}{p^2} = 26.667$.

Entonces X se distribuirá aproximadamente por una $N(80, 26.667)$. Por lo tanto

$$P(X \geq 80) \cong 1 - \phi\left(\frac{80 - 80}{\sqrt{26.667}}\right) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Ejercicio 4

Queremos hallar α tal que $P(X > \alpha) = 0.125$. Como $P(X < 6) = \int_0^6 \frac{x dx}{36} = ... = \frac{1}{2}$, se deduce que $\alpha > 6$. Entonces planteamos la ecuación $P(X > \alpha) = \int_\alpha^{+\infty} f_X(x)dx = \int_\alpha^{12} \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{36}\right) dx = \frac{12-\alpha}{3} - \frac{144-\alpha^2}{72} = 0.125$. Multiplicando por 72 nos queda la ecuación $24(12 - \alpha) - 144 + \alpha^2 = 9$ o sea $\alpha^2 - 24\alpha + 135 = 0$ que al resolverla nos queda $\alpha = 15$ y $\alpha = 9$. Entonces

$$\alpha = 9.$$

Ejercicio 5

El intervalo de confianza es $\left[\overline{X}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}}F^{-1}(1-\alpha/2), \overline{X}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}}F^{-1}(1-\alpha/2)\right]$ siendo F la función de distribución de una variable t-student con 9 grados de libertad, $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $\overline{X}_n = 1.0041$, $s_n = 0.025558$. Entonces el intervalo queda $[a, b] = [0.9858169; 1.022383]$. Entonces

$$10b - a = 9.238014.$$

Ejercicio 6

La distribución de $\overline{X}_{49}$ la aproximamos por TCL por una $N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ siendo

μ y σ^2 la esperanza de una Poisson(λ) o sea bajo H_0 cierto, que la distribución aproximada es $N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right) = N\left(2, \frac{2}{49}\right)$. Entonces

$$\alpha = P_{H_0}\left(\overline{X}_{49} \geq 2.37\right) \cong 1 - \phi\left(\frac{2.37-2}{\sqrt{2}/7}\right) = 0.03352.$$

Si H_1 cierto, la distribución de $\overline{X}_{49}$ queda aproximada por $N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right) = N\left(3, \frac{3}{49}\right)$. Entonces

$$\beta = P_{H_0}\left(\overline{X}_{49} < 2.37\right) \cong \phi\left(\frac{2.37-3}{\sqrt{3}/7}\right) = 0.005446.$$

Entonces

$$\alpha + \beta = 0.038966.$$

Ejercicio 7

- El valor de a lo obtenemos de la ecuación

  $$a = P\{X = 1, Y = 3\} = P\{X = 1\}P\{Y = 3\} = (0.04 + a).(0.54 + a)$$

  Desarrollando y resolviendo la ecuación de segundo grado, so obtiene como resultado: $a = 0,06$ (el otro valor de a es mayor a 0.2).

- El valor de b lo obtenemos de la ecuación

  $$b = P\{X = 3, Y = 2\} = P\{X = 3\}P\{Y = 2\} = (0.48 + b)(0.08 + b).$$

  Eso da como resultado: $b = 0,12$.

- El valor de c lo obtenemos por diferencia, sabiendo que todos los valores de la tabla tienen que sumar 1 (suma en la que incluimos los valores hallados de a y b). De esa forma obtenemos $c = 0.06$.

- Sustituyendo tenemos que $a + b - c = 0.12$.

Ejercicio 8

Planteamos para maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud: $h(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log(p_X(x,\theta))$. Son 6 sumandos, 3 de ellos son $\log\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ (por los tres 1's que hay en la muestra), otro es $\log\left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right)$ (por el 3 de la muestra), otro es $\log\left(\frac{1-\theta}{3}\right)$ (por el 2 de la muestra) y otro es $\log\left(\frac{\theta}{3}\right)$ (por el 0 de la muestra).
Entonces debemos maximizar la función

$$h(\theta) = 3\log\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \log\left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right) + \log\left(\frac{1-\theta}{3}\right) + \log\left(\frac{\theta}{3}\right) =$$

$$4\log(\theta) + 2\log(1-\theta) + 3\log(2/3) + \log(2/3) + \log(1/3) + \log(1/3).$$

Entonces $h'(\theta) = \frac{4}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} = \frac{-6\theta+4}{\theta(1-\theta)} = 0$ si y sólo si $\theta = 2/3$. Con el signo de $h^{'}$ se deduce que el máximo se obtiene en 2/3. Entonces

$$\widehat{\theta} = \frac{2}{3}.$$