Soluciones

Ej 1)

Solución 1 (con árboles)

$p = P(\text{gane } 1^{er} \text{ jugador}) = P(\text{gane } 1^{er} \text{ jugador} \mid \text{lanz. } 1 = X)$

(por simetría) $\quad = P(\text{gane } 1^{er} \text{ jugador} \mid \text{lanz. } 1 = C) = p$

$q = P(\text{gane } 2^{do} \text{ jugador}) = P(\text{gane } 2^{do} \text{ jugador} \mid \text{lanz. } 1 = X)$

$\quad = P(\text{gane } 2^{do} \text{ jugador} \mid \text{lanz. } 1 = C) = q$

$\boxed{p+q=1}$ (1)

Dado lanz. $1 = X$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & C \\ * \arrow[r] & X \arrow[ur, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & \\ & & X \ (2^{do}) \end{tikzcd}$$

empieza de nuevo con rol cambiado

1^{er} jug. $\quad 2^{do}$ jug.

$p = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} q$

$= \frac{1}{2} q$

$\boxed{p = \frac{1}{2} q}$ (2)

De (1) y (2) $\quad \frac{1}{2} q + q = 1, \quad \frac{3}{2} q = 1, \quad \boxed{q = 2/3} \ \boxed{p = 1/3}$

$\boxed{q - p = 1/3}$

Solución 2 (con series)

T = nº lanz. hasta repetir resultado

$R_T = \{2, 3, \dots\}$

$P(T=k) = P(\underbrace{\_\ \_ \dots \_}_{\text{alternado}}\ X\ \underline{C}\ \underline{C}) + P(\underbrace{\_\ \_ \dots \_}_{\text{alternado}}\ C\ \underline{X}\ \underline{X}) = 2 \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$

- $P(\text{gane } 1^{er} \text{ jugador}) = P(T = \text{impar}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(T = 2j+1)$

$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Ejercicio 2

$V = \{\text{La computadora de Pablo fue hackeada}\}$ entonces $P(V) = 0.005$.

$\{+_1\}$=el antivirus 1 detecta un virus

$P(\{+_1\}|V) = 0.85$ y $P(\{+_1\}|V^c) = 0.01$. Usando Bayes se tiene

$$P(V|\{+_1\} = \frac{P(\{+_1\}|V)P(V)}{P(\{+_1\})} = \frac{0.85 \times 0.005}{0.85 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} = 0.299.$$

$\{+_2\}$=el antivirus 2 detecta un virus $P(\{+_2\}|V) = 0.99$, también $P(\{+_2\}|V^c) = 0.005$. Ahora estamos en la situación de que el antivirus 1 detectó un virus llamamos este evento V' y por el cálculo anterior sabemos que $P(V') = 0.299$ y además $P((V')^c) = 0.701$. Entonces

$$P(V|\{+_2\}) = \frac{0.99 \times 0.299}{0.99 \times 0.299 + 0.005 \times 0.701} = 0.998.$$

Ejercicio 3

Los parámetros de las exponenciales son $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ y $t = \frac{1}{2}$

$$P(\text{mín}(T_1,T_2) > t) = P(T_1 > t)P(T_2 > t) = (\lambda_1 \int_t^\infty e^{-u\lambda_1} du)(\lambda_2 \int_t^\infty e^{-v\lambda_2} dv) = e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$= e^{-\frac{3}{2}} = 0.223.$

Ejercicio 4

Para una variable uniforme $\mu = E(U) = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = E(U - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12}$ y además $n = 12$. Debemos determinar $P(0.5 < \overline{X}_{12} < 0.8)$. Ahora bien por el TCL sabemos que $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \approx N(0,1)$. Lo que implica

$$\overline{X}_n \approx \frac{\sigma N(0,1)}{\sqrt{n}} + 0.5 = \frac{N(0,1)}{12} + 0.5$$

De donde

$$P(0.5 < \overline{X}_{12} < 0.8) \approx P(0 < N(0,1) < 0.3 \times 12) = P(0 < N(0,1) < 3.6) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Ejercicio 5

1. La fpp de D es

Valor de D	0.00	−0.49	0.10	0.01
Probabilidad	0.1	0.15	0.4	0.35

Luego, la esperanza es

$$\mathrm{E}(D) = 0.00 \times 0.1 - 0.49 \times 0.15 + 0.10 \times 0.4 + 0.01 \times 0.35 = -0.03.$$

Y la varianza es

$$\mathrm{Var}(D) = (-0.03)^2 \times 0.1 + (-0.52)^2 \times 0.15 + (0.07)^2 \times 0.4 + (-0.02)^2 \times 0.35 = 0.039$$

2. La diferencia total es $S = \sum_{i=1}^{100} D_i$. Por el TCL podemos aproximar la distribución de S por la de una variable normal de media $\mathrm{E}(S) = (-0.03) \times 100 = -3$ y varianza $\mathrm{Var}(S) = (0.039) \times 100 = 3.9$.

   Luego la probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P(S \le 0) &= P\left(\frac{S+3}{\sqrt{3.9}} \le \frac{3}{\sqrt{3.9}}\right) \\ &\approx P(N(0,1) \le 1.52) = 0.9375 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

1. La densidad de la variable aleatoria X es $f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Para $\mu = 1$ y $\sigma = 1$ se tiene $f_X(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = 0.241$
3. Para $\mu = 2$ y $\sigma = 1$ se tiene $f_X(e) = \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = 0.089015$

Ejercicio 7

1. Llamemos X a la cantidad de lanzamientos necesarios para obtener cara en una moneda con probabilidad θ de salir cara. Entonces $X \sim \mathrm{Geom}(\theta)$ y su fpp está dada por

$$P(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}, \quad k \ge 1.$$

   Sea $X_1, \ldots, X_n$ un muestreo iid de X. La verosimilitud viene dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{X_i - 1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)}.$$

   Tomando logaritmo tenemos

$$\ell(\theta) = n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)\ln(1-\theta).$$

   Derivando e igualando a cero llegamos a la ecuación

$$\frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)}{1-\theta} = 0$$

   de donde deducimos que $\hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^{n} X_i = 1/\bar{X}_n$.

   En nuestro caso el promedio vale $\bar{X}_n = 2.17$ de donde $\hat{\theta} = 0.46$.

2. Debemos completar la tabla a partir de la distribución geométrica con $\theta = 0$. Esto nos da

Categoría	1	2	3	4	≥ 5	Suma
p_i	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625	1
E_i	50	25	12.5	6.25	6.25	100
O_i	49	22	16	6	7	100

   El estadístico de Pearson es

$$Q_P = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(-1)^2}{50} + \frac{(-3)^2}{25} + \frac{(3.5)^2}{12.5} + \frac{(-0.25)^2}{6.25} + \frac{(0.75)^2}{6.25} = 1.46$$

   De la tabla deducimos que el p-valor es $p \ge 0.25$.

Ejercicio 8

Denotemos por T la v.a. el tiempo en que llega el delivery. Sabemos que el delivery no ha llegado entre $[9.10, 9.30]$. Consideremos entonces el evento $A =$ (el delivery no ha llegado entre 9.10 y 9.30). Queremos calcular entonces

$$P(T \leq 10|A) = \frac{P((T \leq 10) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((T \leq 10))}{P(A)} = \frac{\frac{1}{1800}\int_0^{10} t\,dt}{\frac{1}{1800}\int_0^{10} t\,dt + \frac{1}{1800}\int_{30}^{60} t\,dt}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\int_{30}^{60} t\,dt}{\int_0^{10} t\,dt}} = \frac{1}{1 + 6^2 - 3^2} = \frac{1}{28}.$$