N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1.1	Ej. 1.2	Ej. 1.3	Ej. 2	Ej. 3.1	Ej. 3.2	Ej. 4
B	A	B	A	F	F	C
Ej. 5.1	Ej. 5.2	Ej. 5.3	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8	Ej. 9
E	C	C	C	A	D	F

Ejercicio 1 (12 puntos)

En un bolso se colocan 5 billetes de 20\$, 7 billetes de 50\$ y 10 billetes de 100\$. Se sacan al azar, sin reposición, un paquete de 8 billetes. Suponiendo que cada billete tiene la misma probabilidad de ser sacado. Responder a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ningún billete de 20\$?

   (**A**) 0.018 (**B**) 0.076 (**C**) 0.127 (**D**) 0.543 (**E**) 0.772 (**F**) 0.972

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído únicamente billetes de 100\$?

   (**A**) 1.41×10^{-4}
   (**B**) 1.12×10^{-3}
   (**C**) 1.82×10^{-3}
   (**D**) 0.127
   (**E**) 0.321
   (**F**) 0.455

3. Sea A el evento no sacar ningún billete de \$20 y B el evento se sacaron solamente billetes de \$100. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos eventos?

   (**A**) $P(A)$
   (**B**) $P(B)$
   (**C**) $P(A)+P(B)$
   (**D**) $P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
   (**E**) $P(A)P(B)$
   (**F**) 1

Solución.

1. Sea X la variable aleatoria igual al número de billetes de 20 así que $X \sim \text{Hip}(22,5,8)$. De esta forma
$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{17}{8}}{\binom{22}{8}} = 0.076.$$

2. Sea Y la variable aleatoria igual al número de billetes de 100 se tiene $Y \sim \text{Hip}(22, 10, 8)$

$$P(Y = 8) = \frac{\binom{10}{8}\binom{12}{0}}{\binom{22}{8}} = 1.41 \times 10^{-4}.$$

3. Ocurren ambos eventos cuando ocurre el evento $A \cup B$. Tenemos así que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

El evento B está incluido en el evento A. Por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)$. Concluimos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) = P(B).$$

Ejercicio 2 (11 puntos)

El funcionamiento de una máquina depende de dos componentes eléctricos x e y, con tiempos de vida útil T_x, T_y que asumiremos exponenciales independientes con esperanzas de 2 y 3 años respectivamente. La máquina deja de funcionar cuando alguno de los componentes falla ¿Cuántos años deben pasar para que la chance de que la máquina deje de funcionar sea del 50 %?

(A) 0.83 **(B)** 1.2 **(C)** 0.2 **(D)** 5 **(E)** 3.47 **(F)** 1.39

Solución. Por la letra tenemos que

$$T_x \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad T_y \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right).$$

Definamos la variable aleatoria T tal que T que mide el tiempo hasta que alguno de los componentes deja de funcionar. Tenemos que $T = \min\{T_x, T_y\}$. Entonces

$$\frac{1}{2} = P(T > t) = P(T_x > t)P(T_y > t) = e^{-\frac{1}{2}t}e^{-\frac{1}{3}t} = e^{-\frac{5}{6}t}.$$

Entonces despejando

$$t = \frac{6}{5}\ln 2 \approx 0,83$$

Ejercicio 3 (11 puntos)

Llenamos un vaso de volumen 20 cl de una cantidad aleatoria de agua seleccionada uniformemente entre 2 y 20 cl.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo 5 cl de agua?

   (A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{1}{5}$ **(F)** $\frac{1}{6}$

2. Cinco vasos, que han sido llenados de la manera señalada antes, se vacían en un gran recipiente. ¿Cuál es la cantidad media de agua que se obtiene en el recipiente?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 25 (**E**) 50 (**F**) 55

Solución.
La cantidad que se agrega en el vaso es una v.a. $X \sim U[2,20]$. Por lo tanto, la función de densidad de X es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \text{si } 2 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y su función de distribución acumulada es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x-2}{18} & \text{si } 2 \leq x < 18 \\ 1 & \text{si } x > 18 \end{cases}$$

1. $P(X \leq 5) = F_X(5) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.
2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_5$ tales que $X_i \sim U[2,20]$ para todo $i = 1, \ldots, 5$. La cantidad que se vierte en el recipiente es $V = \sum_{i=1}^{5} X_i$, así que

$$E(V) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) = 5 \cdot \mathrm{E}(X_1).$$

Como $X_1 \sim U[2,20]$, tenemos que $\mathrm{E}(X_1) = \frac{2+18}{2} = 10$. Por lo tanto

$$\mathrm{E}(V) = 5 \cdot 10 = 50.$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

Según un estudio reciente la altura de las mujeres de un país del Caribe se distribuye según una Gaussiana de media $m = 1.58$ y una desviación estándar $\sigma = 0.06$. Para producir una linea de vestidos un fabricante desea usar esta distribución.

- El fabricante quiere determinar un intervalo $[m-a, m+a]$ simétrico alrededor de la media que contenga el 90 % de las altura de las mujeres. Determinar el valor de a.

(**A**) 0.0600 (**C**) 0.0987 (**E**) 1.6450
(**B**) 0.0771 (**D**) 0.1176 (**F**) 1.6787

Solución.
Si denotamos por X la altura se tiene que $X \sim N(m = 1.58, \sigma^2 = (0.06)^2)$. Entonces

$$P(|X-m| < a) = 0.9.$$

Buscando en la tabla obtenemos la relación $\frac{a}{0.06} = 1.645$, y así $a = 0.0987$.

Ejercicio 5 (12 puntos)

Ana y Beto vuelven de la facultad siempre en el mismo omnibus y se bajan en la misma parada. El tiempo (en minutos) que demora el omnibus en ir desde la facultad hasta la parada es una variable aleatoria T_O con distribución normal de media 20 y desvío 3. Luego Ana y Beto siguen sus caminos por separado hasta sus respectivas casas. Los tiempos T_A y T_B representan lo que demoran en llegar Ana y Beto, respectivamente, desde la parada hasta sus casas. Se asume que ambas tienen distribución normal de media 6 y desvío 1. Además se asume que T_A, T_B y T_O son independientes.

Denotamos por (X_A, X_B) el par de variables que representa los tiempos totales que les lleva recorrer desde la facultad hasta sus casas a Ana y Beto respectivamente, señalamos que $X_A = T_O + T_A$ y que $X_B = T_O + T_B$.

1. De las siguientes opciones indicar la opción correcta. El par (X_A, X_B) tiene distribución normal bi-variada de parámetros:

   (A) $\mu_A = 6$, $\mu_B = 6$, $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 3.16$, $\rho = 0.9$

   (B) $\mu_A = 6$, $\mu_B = 6$, $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 3.16$, $\rho = 1.73$

   (C) $\mu_A = 20$, $\mu_B = 20$, $\sigma_A = 3$, $\sigma_B = 3.16$, $\rho = 0.9$

   (D) $\mu_A = 20$, $\mu_B = 20$, $\sigma_A = 3$, $\sigma_B = 3.16$, $\rho = 1.73$

   (E) $\mu_A = 26$, $\mu_B = 26$, $\sigma_A = 3.16$, $\sigma_B = 3.16$, $\rho = 0.9$

   (F) $\mu_A = 26$, $\mu_B = 26$, $\sigma_A = 3.16$, $\sigma_B = 3.16$, $\rho = 1.73$

2. Un día Ana demora 28 minutos en hacer el recorrido desde la facultad hasta su casa (esto es $X_A = 28$). Calcular la recta de regresión entre los dos tiempos totales y luego estimar el tiempo que demoró Beto.

   (A) 25.5 **(B)** 26 **(C)** 27.8 **(D)** 28 **(E)** 51 **(F)** 51.2

3. Calcular la probabilidad de que la estimación hecha en el punto 2 sea errónea en más de 1 minuto.

   (A) 0.2358 **(C)** 0.4716 **(E)** 0.7642

   (B) 0.2714 **(D)** 0.5284 **(F)** 0.8413

Solución.

1. $E(X_A) = E(T_O + T_A) = 26$. De forma análoga se obtiene que $\mathrm{E}(X_B) = 26$. Usando que la varianza de la suma de independientes es la suma de la varianzas tenemos $\sigma_A^2 = \sigma_O^2 + \sigma_A^2$, lo que nos da $\sigma_A^2 = 10$. El cálculo para σ_B^2 es análoga. Por otra parte

$$\rho = \frac{E\left[(X_A - EX_A)(X_B - EX_B)\right]}{10} = \frac{E[(T_O - ET_O)^2]}{10} = 0.9$$

2. Con los datos del problema anterior podemos calcular la recta de regresión

$$X_B = \mu_B + \alpha(X_A - \mu_A) \text{ donde } \alpha = \frac{\rho\sigma_B}{\sigma_A} = 0.9.$$

   Para $X_A = 28$ obtenemos $X_B = 27.8$.

3. En vista de lo anterior sabemos que condicionalmente a que $X_A = 28$ entonces se tiene que $X_B|X_A = 28 \sim N(\mu_B + 2\alpha, (1.378)^2)$. Luego el error se puede expresar como $1.378Z$, para una gaussiana estándar Z.

$$P(|1.378Z| < 1) = P(|Z| < \frac{1}{1.378}) = 0.4716.$$

Ejercicio 6 (11 puntos)

En un bolillero hay θ bolillas, numeradas del 1 a θ. Se extraen al azar y con reposición tres bolillas de la urna, obteniéndose la muestra $(13, 5, 9)$. Dar una estimación de θ basada en el método de los momentos y hallar el sesgo del estimador.

(**A**) $\overline{\theta} = 9$ y $s = 0$

(**B**) $\overline{\theta} = 13$ y $s = 0$

(**C**) $\overline{\theta} = 17$ y $s = 0$

(**D**) $\overline{\theta} = 9$ y $s = -1$

(**E**) $\overline{\theta} = 13$ y $s = -1$

(**F**) $\overline{\theta} = 17$ y $s = -1$

Solución.
Consideremos la variable aleatoria X el número de la bolilla que salió. Entonces

$$P(X = k) = \frac{1}{\theta}, \quad k \in \{1, 2, \dots, \theta\}.$$

Y tenemos que

$$E(X) = \sum_{1}^{\theta} kP(X = k) = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{\theta} k = \frac{\theta(\theta+1)}{2\theta} = \frac{\theta+1}{2}.$$

Para encontrar el estimador de momentos planteamos la siguiente igualdad

$$\overline{X}_3 = \frac{13+5+9}{3} = \frac{\theta+1}{2} = \mathrm{E}(X),$$

de donde se obtiene $\overline{\theta} = 9 \times 2 - 1 = 17$.

Para calcular el sesgo observemos que $\overline{\theta} = 2\overline{X}_3 - 1$. Luego

$$\text{sesgo}(\overline{\theta}) = \mathrm{E}(\theta) - \theta = \mathrm{E}\left(2\overline{X}_3 - 1\right) - \theta = 2\left(\frac{\theta+1}{2}\right) - 1 - \theta = 0.$$

Ejercicio 7 (11 puntos)

Se desea estudiar el efecto de un nuevo químico sobre la tensión disruptiva (en kV) de un material. Para esto se divide al azar un lote de 16 muestras del material en dos grupos de 8, unas reciben el tratamiento con el nuevo químico (Tratamiento) y las otras se usan de control. Los resultados se muestran en el diagrama de tallos (espalda con espalda) que se muestra abajo.

Considere la hipótesis nula.

H_0: El tratamiento no tiene efecto sobre la tensión disruptiva del material.

Tratamiento		Control
00	53	
0000	54	0
0	55	0
0	56	000
	57	00
	58	0

Y el estadístico $X =$ (suma de respuestas del tratamiento)-(suma de respuestas en control). Se supone que el tratamiento no aumenta la tensión disruptiva del material.

Usando la Figura 1, calcular el p-valor $pval(X_{obs})$ y decidir si rechazar o no H_0 al nivel $\alpha = 0.05$.

(**A**) $pval(X_{obs}) = 0,00427$ y se rechaza H_0

(**B**) $pval(X_{obs}) = 0.00854$ y se rechaza H_0

(**C**) $pval(X_{obs}) = 0,00427$ y se acepta H_0

(**D**) $pval(X_{obs}) = 0.00854$ y se acepta H_0

(**E**) $pval(X_{obs}) = -16$ y se rechaza H_0

(**F**) $pval(X_{obs}) = -16$ y se acepta H_0

Solución. A partir del diagrama de tallos se obtiene que $X_{\text{obs}} = 177 - 193 = -16$. Al asumir que el tratamiento no aumenta la tensión ddisruptiva, las opciones son que reduzca o no tenga efecto, por lo tanto nos planteamos el test a una cola. Queremos calcular entonces

$$\text{pval}(X_{\text{obs}}) = P(X \leq X_{\text{obs}}) = P(X \leq -16)\,.$$

De la figura asociada (distribución de aleatorización de X) se obtiene que

$$\text{pval}(X_{\text{obs}}) = P(X \leq -16) = \frac{44+9+2}{\binom{16}{8}} = \frac{55}{12870} = 0.00427 < \alpha = 0.05.$$

Por lo tanto, hay evidencia para rechazar H_0, es decir, para afirmar que el químico tiene efecto sobre la tensión disruptiva.

Ejercicio 8 (11 puntos)

En un estudio, realizado con bebes de cierta edad, se ha podido determinar qué en los bebés que han nacido a término se observan los siguientes porcentajes

50 % caminan 12 % comienzan a caminar 38 % no caminan.

Se ha tomado una muestra de 80 bebés prematuros y se observa que

35 caminan 4 comienzan a caminar 41 no caminan.

Haga un test de bondad de ajuste Chi-cuadrado para ver si existe una diferencia con el 5 % de confianza de si los bebés prematuros tienen una evolución hacia el caminar igual a la de los bebés normales. Se quiere hacer el test de hipótesis que contraste:
$\mathbf{H}_0$-Los bebes prematuros no se diferencian de los nacidos a término.
$\mathbf{H}_1$-Los bebés prematuros exhiben una diferencia con los nacidos a término.

(**A**) La región de rechazo es $[3.84, \infty]$, por lo tanto se acepta H_0

(**B**) La región de rechazo es $[3.84, \infty]$, por lo tanto se rechaza H_0

(**C**) La región de rechazo es $[5.99, \infty]$, por lo tanto se acepta H_0

(**D**) La región de rechazo es $[5.99, \infty]$, por lo tanto se rechaza H_0

(**E**) La región de rechazo es $[7.81, \infty]$, por lo tanto se acepta H_0

(**F**) La región de rechazo es $[7.81, \infty]$, por lo tanto se rechaza H_0

Solución.

- $N = 80$.
  Valores esperados teóricos:
  $\hat{n}_1 = 80 \times 0.5 = 40$, $\hat{n}_2 = 80 \times 0.12 = 9.6$, $n_3 = 80 \times 0.38 = 30.4$
- Calculo del test
  $$\chi^2 = \frac{(40-35)^2}{40} + \frac{(9.6-4)^2}{9.6} + \frac{(30.4-41)^2}{30.4} = 0.625 + 3.267 + 3.696 = 7.588$$
- Grados de libertad$= 3 - 1 = 2$.
- $\alpha = 5\,\%$. En la tabla de χ^2_2 buscamos la región rechazo es $[5.99, \infty)$. Por consiguiente rechazamos la hipótesis nula.

Ejercicio 9 (11 puntos)

Una moneda tiene probabilidad de cara igual a θ. Se desea hacer el siguiente test de hipótesis sobre el valor de θ:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0.3 \\ H_A : \theta = 0.5 \end{cases}$$

Para esto se la lanza 12 veces, y se usa como estadístico la cantidad de caras.

A continuación se muestra la f.p.p. de una $\text{Bin}(12, \theta)$ para los dos valores de θ:

Función de probabilidad puntual $p(x;\theta)$

θ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.3	.014	.071	.168	.240	.231	.158	.079	.029	.008	.001	.000	.000	.000
0.5	.000	.003	.016	.054	.121	.193	.226	.193	.121	.054	.016	.003	.000

Se toma como región de rechazo $\{0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Luego de lanzar la moneda, no se rechaza H_0 ya que el número observado de caras es 7.

Al tomar esta decisión se puede estar cometiendo un error. Decidir si es un error de tipo I o un error de tipo II y calcular la probabilidad de dicho error.

(**A**) 0.029

(**B**) 0.193

(**C**) 0.213

(**D**) 0.262

(**E**) 0.738

(**F**) 0.787

Solución. Es un error de tipo II.

$$P_{H_1}(\text{Region de aceptación}) = P_{H_1}(3) + P_{H_1}(4) + P_{H_1}(5) + P_{H_1}(6) + P_{H_1}(7) = 0{,}787$$