Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Cursos 2018**

EXAMEN – 30 DE ENERO DEL 2019 **Versión 1**

N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 70 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 7 puntos Respuesta incorrecta: -3 puntos No responde: 0 punto

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2 2)	Ej. 3 1)	Ej. 3 2)	Ej. 4	Ej. 5 1)	Ej. 5 2)	Ej 6 1)	Ej. 6 2)	Ej. 7

Ejercicio 1.
Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente función de probabilidad puntual:

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(\mathbf{X}=x)$	$2\theta/3$	$\theta/3$	$2(1-\theta)/3$	$(1-\theta)/3$

en donde $0 \leq \theta \leq 1$ es un parámetro. Se obtuvieron las siguientes 10 observaciones independientes:

3	0	2	1	3	2	1	0	2	1

Entonces una estimación de θ por el método de máxima verosimilitud es:

(A) 1/2 (B) 3/8 (C) 5/16

Ejercicio 2.
Se consultó a 6 estudiantes de la facultad cuántas veces tuvo que reiniciar su computadora en el último mes. De los 6 estudiantes consultados, 4 tienen computadoras marca A y 2 tienen computadoras marca B. Los estudiantes con marca A tuvieron que reiniciar 1, 2, 2 y 8 veces; aquellos con marca B tuvieron que hacerlo 2 y 3 veces.
Se elige al azar un estudiante entre los 6. Sea X la variable aleatoria Bernoulli que indica la marca de su computadora asumiendo $X = 0$ si la marca es A. Sea Y la variable aleatoria que indica la cantidad de veces que el estudiante reinició su computadora.

1. Completar el siguiente cuadro correspondiente a la distribución conjunta de X e Y

	1	2	3	8
0				
1				

2. El valor esperado de Y^2 es aproximadamente:

(A) 2.4 (B) 14.3 (C) 9

Ejercicio 3.

Se considera la variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x) = \dfrac{K}{1+x^2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

1. El valor de K es:

(A) $1/\pi$ (B) $2/\pi$ (C) 1

2. Si $Y = \arctan(X)$ entonces:

(A) $Y \sim \mathbf{U}\,[0,1]$ (B) $Y \sim \mathbf{U}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $Y \sim \mathbf{U}\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ejercicio 4.

Se consideran dos variables normales independientes X e Y tales que:

- $\mathbb{E}(2X + Y + 1) = 10$
- La densidad de Y es simétrica respecto de $x = 4$

Entonces $\mathbb{P}(X \geq 2{,}5, Y \leq 4) =$

(A) 0,25 (B) 0 (C) mayor que 0,5

Ejercicio 5.

Una sala de espectáculos tiene capacidad para 150 espectadores sentados. Para el estreno de su nuevo espectáculo decide vender 160 entradas de modo de asegurarse que la sala esté llena el día del estreno. Los registros indican que 1 de cada 10 personas que compran entrada no concurre el día del espectáculo. Se asume además que los espectadores actuán de manera independiente unos de otros.

1. El número esperado de personas que concurren el día del estreno es:

(A) 150 (B) 144 (C) 145

2. Sea A el evento "el día del estreno hay al menos una persona parada". La probabilidad de A es aproximadamente:

(A) 0,1 (B) 0,032 (C) 0,313

Ejercicio 6.

Se asume que los puntajes obtenidos por los estudiantes en un examen (normalizados entre 0 y 1) se distribuyen según la siguiente densidad:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ a(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El umbral de aprobación es igual a 0,55.

1. La probabilidad de que un estudiante apruebe el examen es:

(A) $0,605$ (B) $0,2025$ (C) $0,405$

2. El primer cuartil de la distribución de puntajes es:

(A) $0,25$ (B) $0,35$ (C) $0,125$

Ejercicio 7.

Una embotelladora vierte refresco en sus botellas según una distribución normal con media $500\,mL$ y varianza $100\,mL^2$. El llenado de cada botella se hace de manera independiente. Si se llenan cuatro botellas, entonces con probabilidad 0.95 el total de refresco vertido en las cuatro botellas pertenece al intervalo:

(A) [1967 ; 2033] (B) [1921.6 ; 2078.4] (C) [1960,8 ; 2039,2]

Desarrollo (Total: 30 puntos)

Justificar todos los cálculos y argumentos utilizados en las respuestas.

El ejercicio 10 corresponde al 1er semestre 2018, el ejercicio 9 al 2do semestre 2018.

Se deberá realizar el ejercicio 8 y uno (y sólo uno) de estos dos ejercicios a elección.

Ejercicio 8.

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ desconocido y σ conocido. Sea $\alpha \in (0,1)$, probar que el intervalo $I_n(\alpha)$ siendo

$$I_n(\alpha) = \left[\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

es un intervalo de confianza para μ al $(1-\alpha) \times 100\,\%$. Se asume como conocido el siguiente resultado: si $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ independientes, entonces $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Ejercicio 9.

1. Se consideran los siguientes datos:

3,2	0,3	1,95	0,5	0,25	0,9	2,85	1,9	0,85	1,4

¿Se puede suponer que esta muestra proviene de una distribución normal?

2. Se consideran los siguientes datos:

2,5	2,0	4,35	3,05	3,9	3,6

¿Se puede suponer que estos datos provienen de la misma distribución que los datos anteriores?

Ejercicio 10.

Se desea estudiar el efecto de un nuevo químico sobre la tensión disruptiva (en kV) de un material. Para esto se divide al azar un lote de 16 muestras del material en dos grupos de 8, unas reciben el tratamiento con el nuevo químico (Tratamiento) y las otras se usan de control. Los resultados se muestran en el diagrama de tallos (espalda con espalda) que está a la derecha.

Tratamiento		Control
00	53	
0000	54	0
0	55	0
0	56	000
	57	00
	58	0

Considere la hipótesis nula

$$H_0 : \text{El tratamiento no tiene efecto sobre la tensión disruptiva del material}$$

y el estadístico X = (suma de respuestas en tratamiento)-(suma de respuestas en control). Se asume que el tratamiento no aumenta la tensión disruptiva del material.

1. Usando la Figura 1, calcular el p-valor $\text{pval}\,(X_{\text{obs}})$. Decidir si rechazar o no H_0 para el valor umbral $p_u = 0{,}05$.

2. Se considera la región de rechazo $I_r(c) = (-\infty, c]$. Usando la Figura 1, hallar el mayor valor de c para el cual la probabilidad de error de tipo I es menor o igual que $\alpha = 0{,}05$. Decidir si rechazar o no H_0.

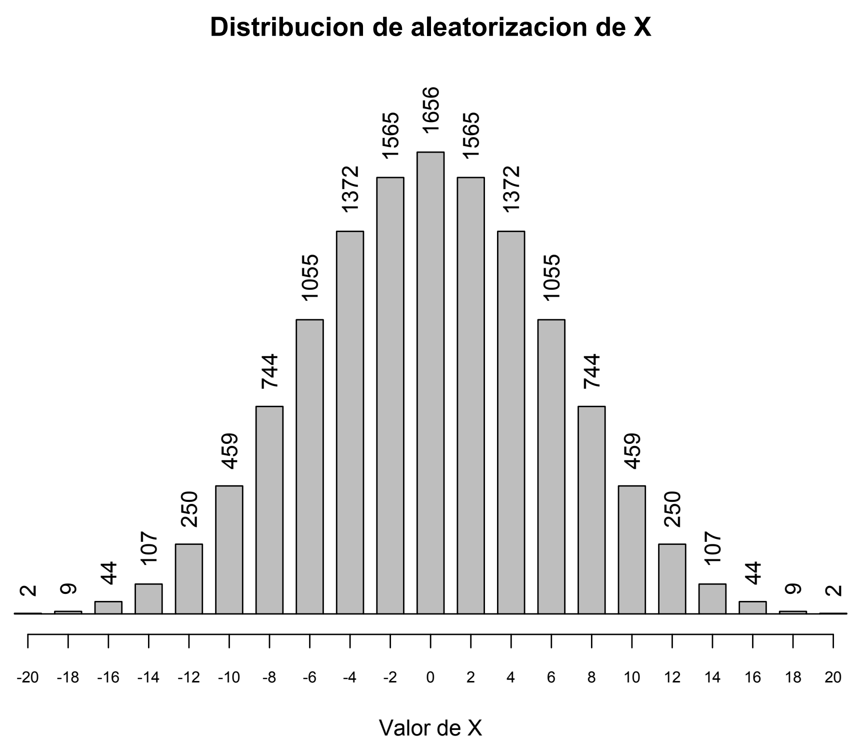

Figura 1: Distribución de aleatorización de X para usar en el Ejercicio 10.