Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2018**

EXAMEN
SÁBADO 21 DE JULIO 2018.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

Número de hojas entregadas:

PARA USO DOCENTE						
Ej. 1	Ej. 2	Ej.3	Ej.4	Ej.5	Ej.6	TOTAL

Importante: Justificar (y escribir todos los cálculos necesarios para) las respuestas.

Ejercicio 1. [**10 puntos**]

Ana y Beto lanzan dos veces una moneda equilibrada cada uno. Se asume que los lanzamientos son todos independientes. Sea X la cantidad de caras que obtiene Ana, e Y la cantidad de caras que obtiene Beto.

1. Calcular la probabilidad de que Ana y Beto obtengan la misma cantidad de caras.
2. Sea $Z = \max\{X, Y\}$. Hallar, completando una tabla de contingencia, la distribución conjunta de X y Z. ¿Son independientes?

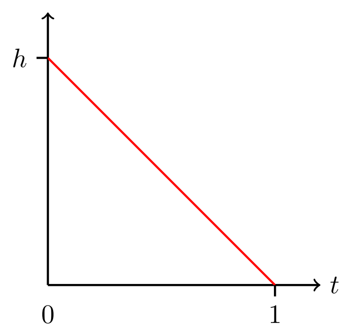
Ejercicio 2. [**20 puntos**]

Ana y Beto acuerdan en encontrarse a las 12 del medio día para almorzar. Ana llega a una hora con distribución uniforme en $[0, 60]$ medida en minutos a partir de las 12:00. Beto llega a una hora con distribución uniforme en $[0, 30]$. Asumir que la hora de llegada de Ana y Beto son independientes.

1. Calcular la probabilidad de que Beto llegue antes que Ana.
2. Se asume además que Beto, en caso de llegar antes que Ana, la espera como máximo hasta las 12:45. Dado que Beto llega antes que Ana, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren?

Ejercicio 3. [**20 puntos**]

El tiempo de atención (en horas) de un mostrador A en una tienda es una variable aleatoria T_A cuya densidad está graficada a la derecha. En otro mostrador B el tiempo de atención (en horas) T_B tiene distribución uniforme en $[0, 1]$.



1. Hallar la esperanza de T_A.
2. Hallar y graficar las funciones $S_A(t) = \mathbf{P}(T_A \geq t)$ y $S_B(t) = \mathbf{P}(T_B \geq t)$ definidas para $0 \leq t \leq 1$. ¿Si fueras un cliente, qué mostrador eligirías?

Ejercicio 4. [**15 puntos**] Un ingeniero que trabaja para un fabricante de llantas investiga el efecto de un nuevo compuesto sobre la duración del caucho. Para esto divide al azar un lote de 16 llantas en dos grupos de 8, unas reciben el tratamiento con el nuevo compuesto (Tratamiento) y las otras se usan de control. Los datos, en miles de km, obtenidos son los siguientes:

Tratamiento: 61, 59, 60, 65, 58, 60, 61, 60. Control: 59, 60, 61, 62, 55, 60, 59, 61.

Considere la hipótesis nula

$$H_0 : \text{El tratamiento no tiene efecto sobre la duración del caucho.}$$

y el estadístico X = (suma de respuestas en tratamiento)-(suma de respuestas en control). Se asume que el tratamiento no disminuye la duración del caucho.

1. Usando la Figura 1 (ver página 3), calcular el p-valor $\text{pval}(X_{\text{obs}})$. Decidir si rechazar o no H_0 utilizando como umbral $p_u = 0.05$.
2. Se considera la región de rechazo $I_r(c) = [c, +\infty)$. Usando la Figura 1, hallar el menor valor de c para el cual la probabilidad de error de tipo I es a lo sumo $\alpha = 0.05$. Decidir si rechazar o no H_0.

Ejercicio 5. [**20 puntos**]

En un experimento para investigar la relación entre el alargamiento (Y en %) y la temperatura (X en grados) de la mozzarella se observa que dichas variables se ajustan al modelo normal bi-variado. La siguiente tabla indica la estimación de sus parámetros:

Temperatura	media: 70	desvío: 5
Alargamiento	media: 175	desvío: 20
correlación: 0.75		

1. Hallar y tal que $\mathbf{P}(Y \geq y | X = 60) = 0.05$.
2. Se dispone de un ejemplar de mozzarella cuya temperatura es de 60 grados. Dar un intervalo que contenga su alargamiento con probabilidad 0.9.

Ejercicio 6. [**15 puntos**] Sea X una variable aleatoria con la siguiente densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea $X_1, \ldots, X_n$ un muestreo aleatorio de X.

1. Hallar el estimador de máxima verosimilitud $\hat{a}$ de a.
2. ¿Es $\hat{a}$ un estimador consistente de a?

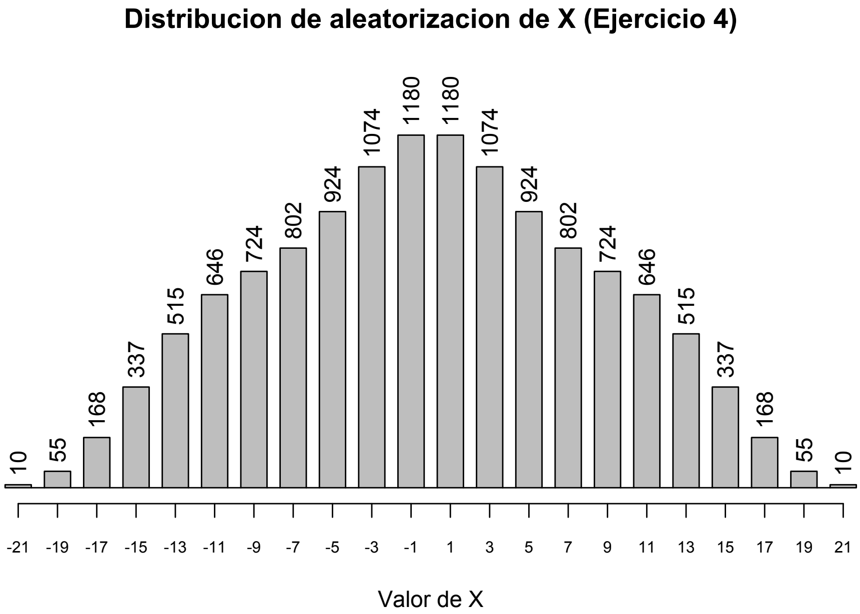


Figure 1: Distribución de aleatorización de X para usar en el Ejercicio 4.

Tabla de la normal estándar

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Definiciones y fórmulas que pueden ser útiles

- X tiene distribución Bernoulli de parámetro p si $\mathcal{R}_X = \{0,1\}$ con $P(X=1)=p$ y $P(X=0)=1-p$. La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=p$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=p(1-p)$.

- X tiene distribución binomial de parámetros n y p si $\mathcal{R}_X=\{0,1,\dots,n\}$ y $P(X=k)=C^n_k p^k(1-p)^{n-k}$. La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=np$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=np(1-p)$.

- X tiene distribución hipergeométrica de parámetros N, K, y n si $\mathcal{R}_X=\{k\in\mathbb{N} : \max\{0, n-(N-k)\} \leq k \leq \max\{K,n\}\}$ y
$$P(X=k)=\frac{C^K_k C^{N-K}_{n-k}}{C^N_n}.$$
La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=np$ y la varianza es
$$\mathbf{var}(X)=np(1-p)\left[1-\frac{n-1}{N-1}\right],$$
en donde $p=K/N$.

- X tiene distribución geométrica de parámetro p si $\mathcal{R}_X=\{1,2,\dots\}$ y $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$. La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=1/p$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

- X tiene distribución de Poisson de parámetro λ si $\mathcal{R}_X=\{0,1,\dots\}$ y $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=\lambda$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=\lambda$.

- X tiene distribución uniforme en $[a,b]$ si tiene densidad dada por
$$f_X(x)=\begin{cases}1/(b-a) & \text{si } x\in[a,b];\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$
La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=(a+b)/2$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=(b-a)^2/12$.

- X tiene distribución exponencial de parámetro λ si tiene densidad dada por
$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0;\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$
La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=1/\lambda$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=1/\lambda^2$.

- X tiene distribución normal estándar si tiene densidad dada por
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ x\in\mathbb{R}$$
La esperanza de X es $\mathbf{E}(X)=0$ y la varianza es $\mathbf{var}(X)=1$.

- (X,Y) tiene distribución normal bi-variada **estándar** de correlación ρ si X e Y tienen distribución normal estándar y existe Z normal estándar independiente de X tal que $Y=\rho X+\sqrt{1-\rho^2}Z$. En este caso, se tiene
$$\mathbf{E}(Y|X=x)=\rho x \qquad \text{y} \qquad \mathbf{E}(Y|a<X<b)=\frac{\frac{\rho}{2\pi}\cdot\left(e^{-a^2/2}-e^{-b^2/2}\right)}{\Phi(b)-\Phi(a)}.$$