Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Cursos 2018**

EXAMEN – LUNES 17 DE DICIEMBRE 2018

N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 70 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 7 puntos   Respuesta incorrecta: -3 puntos   No responde: 0 punto

Respuestas

Ej. 1 1)	Ej. 1 2)	Ej. 2 1)	Ej. 2 2)	Ej. 3 1)	Ej. 3 2)	Ej. 4 1)	Ej. 4 2)	Ej. 5 1)	Ej 5 2)

Ejercicio 1.
Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple Ber(p) con $p \in [0, 1/2]$. Si $\hat{\theta}$ es el estimador de p por el método de máxima verosimilitud entonces:

1. (A) $\hat{\theta} = \overline{X}_n$ (B) $\hat{\theta} = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$ (C) $\hat{\theta} = \text{mín}\{\overline{X}_n, 1/2\}$
2. (A) $\text{Var}(\hat{\theta}) = p(1-p)$ (B) $\text{Var}(\hat{\theta}) = np(1-p)$ (C) $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{p(1-p)}{n}$

Ejercicio 2.
Sean X e Y variables aleatorias absolutamente continuas con densidad conjunta dada por la función

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Kx^2y & \text{si } -1 < x < 1,\ x^2 < y < 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

donde K es una constante real positiva.

1. El valor de la constante K es:

   (A) 21/4   (B) 1   (C) 21/11

2. La opción correcta es:

   (A) X e Y son dependientes y $\mathbb{E}(XY) = 0$
   (B) X e Y son dependientes y $\mathbb{E}(XY) \neq 0$
   (C) X e Y son independientes

Ejercicio 3.
Ana y Beto lanzan un dado equilibrado cada una. El que obtiene la puntuación más alta gana, y si empatan gana Beto.

1. La probabilidad que Beto le gane a Ana es:

   (A) 7/12 (B) 1/2 (C) 7/18

2. Si juegan 10 partidas de manera independiente, la probabilidad de que Beto gane al menos 2 partidos es:

   (A) 0,9976 (B) 0,9996 (C) 0,9921

Ejercicio 4.
La variable aleatoria X representa la cantidad de exámenes a la que se presenta un estudiante en el período de Diciembre. El recorrido de X es $\{1, 2, 3, 4\}$. Se sabe además que $\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}5$, $\mathbb{P}(X = 4) = 0{,}05$ y que $F_X(2) = 0{,}85$ siendo F_X la función de distribución de X.

1. La varianza de X es:

   (A) 3,6 (B) 0,71 (C) 1,9

2. Si se selecciona un estudiante al azar, sabiendo que se presenta a más de un examen, la probabilidad de que se presente a 3 o más es:

   (A) 0,2 (B) 0,15 (C) 0,3

Ejercicio 5.
Se consideran tres sucesos A, B y C tales que

- B y C son incompatibles, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$;
- A y C son independientes;
- $\mathbb{P}(B \cup C) = 0{,}6$
- $\mathbb{P}(A|B) = 1/6$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}85$

Entonces:

1. $\mathbb{P}(A) =$

   (A) 0,6 (B) 0,4 (C) 0,5

2. $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) =$

   (A) 0,7 (B) 0,37 (C) 0,55

Desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 6.
(15 puntos)

1. Demostrar el teorema de Markov: si X es una variable aleatoria no negativa, entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumple
$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\epsilon}$$

2. Demostrar la desigualdad de Tchesbyshev: si T_n es un estimador de θ entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumple
$$\mathbb{P}(|T_n - \theta| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{ECM}(T_n)}{\epsilon^2}$$
donde ECM es el error cuadrático medio de la variable T_n.

Ejercicio 7.
(15 puntos) La siguiente tabla resume los puntajes de un grupo de estudiantes en dos pruebas correspondientes a asignaturas distintas en el mismo período de exámenes:

1era prueba	media: 65	desvío: 10
2da prueba	media: 75	desvío: 9
correlación: 0.6		

Asumimos que los datos se distribuyen como una normal bivariada.

1. Un estudiante obtuvo 60 puntos en la primera prueba ¿Qué puntaje pronosticarías para la segunda prueba?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que tu pronóstico anterior sea erróneo por más de 5 puntos?