Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2016**

Examen Febrero
Miércoles 1 de Febrero de 2017.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE			
Ej. 1	Ej. 2	Ej.3	TOTAL

Ejercicio 1. [**28 puntos**]

Dos profesores toman un examen oral. Para poner una nota al estudiante luego de su examen, cada profesor debe elegir una nota, estas pueden ser $+1$ o -1. La nota final del estudiante es la suma de las dos notas: si la suma es 2 la nota final es A, si la suma es 0 la nota final es B y si la suma es -2 la nota final es C. Denotamos por X_1 la nota puesta por el primer profesor y X_2 la nota puesta por el segundo.

Para desgracia de los estudiantes, los profesores eligen la nota del estudiante al azar, de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{e^{\beta x_1 x_2}}{C}, \quad \text{para } x_1, x_2 \in \{-1, +1\},$$

y en donde $\beta \geq 0$ es un parámetro que llamaremos *parámetro de interacción* entre los profesores[1].

1. Completar una tabla como la siguiente,

$X_1 \backslash X_2$	-1	$+1$
-1		
$+1$		

   con las probabilidades correspondientes en función de β y de C. Calcular C en función de β.

2. Determinar las distribuciones marginales de X_1 y X_2 respectivamente.

3. Responder a las preguntas que siguen en función del valor de β. Se recomienda realizar los cálculos usando la constante C y solo sustituir su valor al final de cada cálculo.

   (a) Calcular el coeficiente de correlación entre X_1 y X_2. ¿Qué ocurre cuando $\beta \to +\infty$? Interpretar el resultado.

   (b) Determinar y justificar, según el valor de β, si X_1 y X_2 son independientes.

4. (a) Calcular, en función de β, la probabilidad $\mathbf{P}(X_1 = X_2)$. Interpretar el resultado analizando los casos extremos en que $\beta = 0$ y cuando $\beta \to +\infty$.

   (b) En la siguiente tabla se muestran las notas finales (i.i.d.) de los estudiantes del curso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	C	A	A	C	B	A	A	C	C	B	B	A	C	B	C	C	A	A

   La primer fila indica el estudiante y la segunda su nota final. A partir de estos datos, estimar el parámetro de interacción β de los profesores indicando qué resultado del teórico se utiliza.

[1]Es importante notar que β puede ser igual a cero.

Ejercicio 1. Solución.

1. Basta evaluar la función de probabilidad conjunta en los valores indicados:

X_1/X_2	-1	+1
-1	$\frac{1}{C}e^{\beta}$	$\frac{1}{C}e^{-\beta}$
+1	$\frac{1}{C}e^{-\beta}$	$\frac{1}{C}e^{\beta}$

La constante C es tal que la función dada es función de probabilidad puntual, por lo tanto debe cumplir

$$\sum_{x_1,x_2\in\{-1,+1\}} \mathbb{P}\left(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2\right) = 1$$

y esto ocurre solo si $C = 2\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right)$.

2. $\mathbb{P}\left(X_1 = -1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = +1\right) = \frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{C} = \frac{1}{2}$
Analogamente, $\mathbb{P}\left(X_2 = -1\right) = \mathbb{P}\left(X_2 = +1\right) = \frac{1}{2}$

3.

(a) Se pide calcular el coeficiente de correlación ρ:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} \times \sqrt{\mathrm{Var}(X_2)}} = \frac{\mathbb{E}\left(X_1X_2\right) - \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} \times \sqrt{\mathrm{Var}(X_2)}}$$

Y se tiene que:

- $\mathbb{E}\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left(X_2\right) = 1\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0$
- $\mathrm{Var}\left(X_1\right) = \mathrm{Var}\left(X_2\right) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = 1^2\frac{1}{2} + (-1)^2\frac{1}{2} = 1$
-

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_1X_2\right) &= \sum_{x_1,x_2\in\{-1,+1\}} x_1x_2\mathbb{P}\left(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2\right) = 1\frac{1}{C}e^{\beta} - 1\frac{1}{C}e^{-\beta} - 1\frac{1}{C}e^{-\beta} + 1\frac{1}{C}e^{\beta} \\ &= \frac{2\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right)}{C} = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}\end{aligned}$$

Se obtiene entonces que:

$$\rho = \rho\left(\beta\right) = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}.$$

Tomando límite $\beta \to +\infty$ resulta que $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \rho(\beta) = 1$. Por lo tanto a mayor β mayor correlación entre las variables (notas de los profesores).

(b) Si X_1 y X_2 son independientes, entonces $\mathbb{E}\left(X_1X_2\right) = \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)$. Por la parte anterior sabemos que $\mathbb{E}\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left(X_2\right) = 0$. Por lo tanto si $\mathbb{E}\left(X_1X_2\right) \neq 0$ sabremos que las variables no son independientes. Pero $\mathbb{E}\left(X_1X_2\right) = \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}} \neq 0$ si $\beta \neq 0$, es decir que si $\beta \neq 0$ (i.e. existe interacción), entonces X_1 y X_2 no son independientes.
Falta analizar el caso $\beta = 0$. En este caso se cumple que $\mathbb{E}\left(X_1X_2\right) = \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)$, pero esto NO implica que X_1 y X_2 sean independientes. En este caso, hay que verificar la definición y para $\beta = 0$ se verifica que

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1; X_2 = x_2\right) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right)\mathbb{P}\left(X_2 = x_2\right) \quad \forall x_1, x_2 \in \{-1, +1\}$$

Por lo tanto las variables X_1 y X_2 son independientes para $\beta = 0$.

4. (a)

$$\mathbb{P}\left(X_1 = X_2\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = -1; X_2 = -1\right) + \mathbb{P}\left(X_1 = +1; X_2 = +1\right) = \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}} = \frac{1}{1 + e^{-2\beta}}.$$

(b) En la siguiente tabla se muestran las notas finales (i.i.d.) de los estudiantes del curso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	C	A	A	C	B	A	A	C	C	B	B	A	C	B	C	C	A	A

La primer fila indica el estudiante y la segunda su nota final. De la parte anterior sabemos que $p = \mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{1}{1+e^{-2\beta}}$ y podemos estimar p por:

$$p_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_1^{(i)} = X_2^{(i)}\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{\text{la nota del estudiante i es A o C}\}$$

ya que podemos aplicar la Ley de los Grandes Números a las v.a. $Z_i = \mathbf{1}_{\{X_1^{(i)} = X_2^{(i)}\}}$, que son también una muestra i.i.d. Luego, estimamos p por $p_{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ y resolvemos:

$$\frac{1}{1+e^{-2\hat{\beta}}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \hat{\beta} = \frac{\log 3}{2}.$$

Hay otras estimaciones posibles, por ejemplo sabemos que $q = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{e^{\beta}}{C}$ y al igual que antes esta probabilidad se puede estimar a partir de la muestra como

$$q_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_1^{(i)} = X_2^{(i)} = 1\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{\text{la nota del estudiante i es A}\} = \frac{7}{20}$$

Ejercicio 2. [**30 puntos**]

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Rayleigh de parámetro σ si su densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{xe^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad \forall\, x \geq 0$$

1. (a) Aplicando el cambio de variable $u = t^2/2\sigma^2$ resulta que:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-u}\mathrm{d}u = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ si } x \geq 0.$$

   (b) Aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \frac{t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t\frac{te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.$$

Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = 1$ (por ser la integral de la densidad de una v.a. $N(0,\sigma^2)$). Además por ser una función simétrica respecto del 0, resulta que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \quad \text{de donde} \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$$

A su vez, hay varias posibilidades para realizar el cálculo, por ejemplo es posible reconocer en el cálculo del valor esperado, a $\mathbb{E}(Z^2)$ siendo $Z \sim N(0,\sigma^2)$. También es posible obtener directamente la expresión de $\mathbb{E}(X)$ utilizando que por ser una v.a. positiva $\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$.

Para el cálculo de la mediana, buscamos m_X tal que $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$. Despejando, se obtiene que $m_X = \sigma\sqrt{2\log 2}$.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de variables aleatorias idénticamente distribuidas con distribución Rayleigh de parámetro σ.

(a) Buscamos el EMV de σ. La función de verosimilitud en este caso es:

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sigma^{2n}}.$$

Sea $\eta = \sigma^2$. Hallaremos el EMV de η. Sea

$$g(\eta) = \log\left(L\left(\sigma^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{1}{2\eta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\log\eta.$$

Entonces $g'(\eta) = \dfrac{1}{2\eta^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\frac{1}{\eta} = 0$ si $\eta = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ y $L(\sigma)$ se maximiza en

$$\hat{\sigma}_{MV} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

(b) Buscaremos dos estimadores de σ, diferentes al de la parte anterior.

- Por la ley de los grandes números sabemos que $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$, luego podemos estimar σ por $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{x_n}$.
- Sabemos que $\hat{m}_X$ la mediana empírica de los datos cumple que $\hat{m}_X \to m_X = \sigma\sqrt{2\log 2}$, luego podemos estimar σ por $\hat{\sigma}'_n = \frac{1}{\sqrt{2\log 2}}\hat{m}_X$

3. Sea Y una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. Se define $Z = \sqrt{Y}$:

(a) $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\sqrt{Y} \leq z\right) = \mathbb{P}\left(Y \leq z^2\right) = 1 - e^{-\lambda z^2}$ y $f_Z(z) = 2z\lambda e^{-\lambda z^2}$ si $z \geq 0$.

Si tomamos $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, entonces $f_Z(z) = \dfrac{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}$. Es decir que $Z = \sqrt{Y}$ tiene distribución Rayleigh de parámetro $\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}$.

(b) Se tiene que $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$ y por la partes anteriores tenemos tres estimadores diferentes de σ, por lo tanto basta utilizar cualquiera de ellos para sustituir por el verdadero valor de σ. Por ejemplo, sabemos que la mediana empírica $\hat{m}_Z$ verifica que $\hat{m}_Z \to m_Z$ siendo m_Z tal que:

$$1 - e^{-\lambda(m_Z)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m_Z^2 = \frac{1}{\lambda}\log 2.$$

Luego, estimamos λ por $\hat{\lambda} = \frac{\log 2}{(\hat{m}_Z)^2}$.

También es posible construir una nueva muestra iid, tomando $Y_i = Z_i^2$. Esta muestra tiene distribución exponencial de parámetro λ y por lo tanto es posible los estimadores conocidos para este caso.

Ejercicio 3. [42 puntos]

Supongamos que alguien, un emisor (E), nos envía un mensaje que contiene el dígito 1 o el dígito 0. Nosotros, el receptor (R), no recibimos el mensaje tal cual fue enviado de origen, sino perturbado por un ruido. Si denotamos por $\mu \in \{0,1\}$ el dígito enviado por (E), nosotros recibimos $Y = \mu + X$, en donde X es una variable aleatoria de distribución normal $N(0, \sigma^2)$.

1.
   - Si $\mu = 0$, entonces $Y = X \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ y $f_{Y|\mu=0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.
   - Si $\mu = 1$, entonces $Y = 1 + X \sim N\left(1, \sigma^2\right)$ y $f_{Y|\mu=1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$.

Si σ es grande, habrá mayor intersección de las densidades y por lo tanto será más difícil decidir entre $\mu = 0$ y $\mu = 1$.

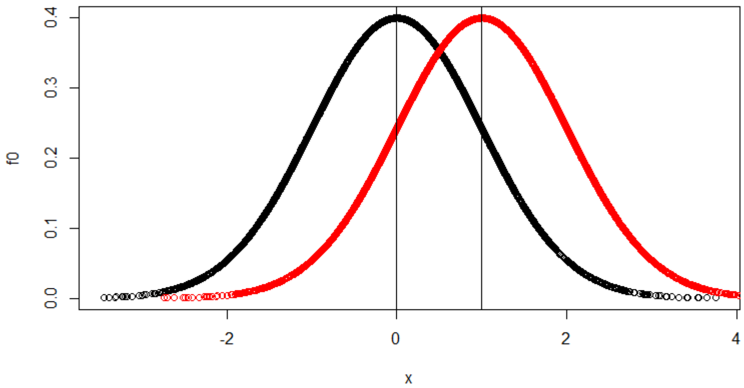

Figure 1: Se grafican las densidad si $\mu = 0$ (en negro) y si $\mu = 1$ (en rojo) para $\sigma = 1$. Al aumentar σ aumenta la dispersión, es decir el "ancho" de las campanas.

2. Se asume que $\sigma = 1$. Supongamos que (E) nos envía el mismo dígito μ varias veces y de forma independiente, para que podamos reconstruirlo. Nosotros recibimos entonces una muestra i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_n$, en donde n es la cantidad de veces que (E) nos envía el mensaje.
Observar que μ está fijo pues envía el mismo mensaje n veces (i.e. $Y_i = \mu + X_i$)

   (a) Consideremos el siguiente test de hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$$

   y la región crítica $R_c = \{\overline{Y}_n > c\}$, en donde $c \in (0, 1)$.

   - $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(RC) = \mathbb{P}_{H_0}\left(\overline{Y}_n > c\right)$. Recordar que la suma de normales independientes es normal, por lo que:
$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu + X_i) = \mu + \overline{X}_n \sim \mu + N\left(0, \frac{1}{n}\right) \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right).$$
   Entonces $\alpha = \mathbb{P}_{\mu=0}\left(N\left(\mu, \frac{1}{n}\right) > c\right) = \mathbb{P}\left(N\left(0, \frac{1}{n}\right) > c\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}c\right)$
   - $\beta = P_{H_1}(RC^c) = P_{H_1}\left(\overline{Y}_n \leq c\right) = \mathbb{P}_{\mu=1}\left(N\left(\mu, \frac{1}{n}\right) \leq c\right) = \mathbb{P}\left(N\left(1, \frac{1}{n}\right) \leq c\right) = \Phi\left(\sqrt{n}(c-1)\right)$

   (b) Supongamos ahora que $n = 10$ y que hemos recibido los siguientes mensajes:

-1.44	3.29	0.67	-0.68	0.84	-0.27	-0.11	1.59	-0.05	1.27

   Si $n = 10$ y $\alpha = 0.05$, entonces c es tal que $1 - \Phi\left(\sqrt{10}c\right) = 0.05$. Utilizando la tabla de la normal, resulta que $c = \frac{z_{0.05}}{\sqrt{10}} = \frac{1.65}{\sqrt{10}} \approx 0.5218$. Luego,

$$R_{0.5218} = \{(y_1, ..., y_{10}) : \overline{y}_{10} > 0.5218\}.$$

   En este caso $\overline{y}_{10} = 0.511$, por lo que NO RECHAZAMOS H_0 y

$$\beta = \Phi\left(\sqrt{10}(0.5218 - 1)\right) = \Phi(-1.51) = 1 - \Phi(1.51) \approx 0.0655$$

   (c) Observar que $\alpha = 1 - \Phi(\sqrt{n}c)$ si y solo si $c = c_\alpha = \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$. Luego, con esta muestra pasamos de aceptar a rechazar H_0 cuando $c_\alpha = \overline{y}_n = 0.511$, por lo que el valor del p-valor es:

$$\alpha^* = 1 - \Phi\left(\sqrt{10} \times 0.511\right) = 0.053$$

   (d) Sea $g(c) = \alpha(c) + \beta(c) = 1 - \Phi(\sqrt{n}c) + \Phi(\sqrt{n}(c-1))$. Entonces si le llamamos φ a la densidad de una $N(0, 1)$, tenemos que:

$$g'(c) = -\varphi\left(\sqrt{n}c\right)\sqrt{n} + \varphi\left(\sqrt{n}(c-1)\right)\sqrt{n}$$

y $g'(c) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\sqrt{n}c) = \varphi(\sqrt{n}(c-1)) \Leftrightarrow \sqrt{n}(c-1) = -\sqrt{n}c$ (usamos la simetría de φ respecto al 0) $\Leftrightarrow c^* = \frac{1}{2}$. Es ese caso $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.0571$. Es decir que coinciden las probabilidades de cometer los dos tipos de errores.

(e) Si $c = c^* = \frac{1}{2}$, se rechaza H_0 ya que $\overline{y}_n = 0.511$.

(f) En b) NO se rechaza H_0 y el error conocido es $\alpha = 0.05$. El error no controlado (β) que podríamos estar cometiendo tiene probabilidad $\beta = 0.0655$

En e) se rechaza H_0. En este caso no se controla ninguno de los errores (tipo I y II). De los cálculos se obtiene que en este caso los errores tienen igual probabilidad igual a $\alpha = \beta = 0.0571$. Es decir que aumenta α y disminuye β, aunque en este caso las diferencias no son significativas.

3. En esta parte suponemos que $\sigma = 1$. Supongamos además que (E) elige al azar el dígito μ que nos va a enviar de forma equiprobable, y que el ruido X es independiente del μ elegido por (E).

(a) $\mathbb{P}(\mu = 0 | a < Y \leq b) = \frac{\mathbb{P}(a<Y\leq b|\mu=0)\times\mathbb{P}(\mu=0)}{\mathbb{P}(a<Y\leq b)} = \frac{(\Phi(b)-\Phi(a))\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(a<Y\leq b)}$ y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < Y \leq b) &= \mathbb{P}(a < Y \leq b|\mu = 0)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(a < Y \leq b|\mu = 1)\frac{1}{2}\\ &= (\Phi(b) - \Phi(a))\frac{1}{2} + \mathbb{P}(a < X + 1 \leq b)\frac{1}{2}\\ &= (\Phi(b) - \Phi(a))\frac{1}{2} + \mathbb{P}(a - 1 < X \leq b - 1)\frac{1}{2}\\ &= \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{2} + \frac{\Phi(b-1) - \Phi(a-1)}{2}\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{P}(\mu = 0 | a < Y \leq b) = \frac{(\Phi(b) - \Phi(a))\frac{1}{2}}{(\Phi(b) - \Phi(a) + \Phi(b-1) - \Phi(a-1))\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\Phi(b-1)-\Phi(a-1)}{\Phi(b)-\Phi(a)}}$$

(b)

$$P(\mu = 0 | Y = y) = \lim_{a,b\to y} \frac{1}{1 + \frac{\Phi(b-1)-\Phi(a-1)}{\Phi(b)-\Phi(a)}} = \frac{1}{1 + \lim_{a,b\to y}\frac{\Phi(b-1)-\Phi(a-1)}{\Phi(b)-\Phi(a)}}$$

Para calcular $\lim\limits_{a,b\to y} \dfrac{\Phi(b-1) - \Phi(a-1)}{\Phi(b) - \Phi(a)}$ usaremos la sugerencia de que $\lim\limits_{a,b\to y} \dfrac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b - a} = \varphi(y)$.

$$\begin{aligned}\lim_{a,b\to y} \frac{\Phi(b-1) - \Phi(a-1)}{\Phi(b) - \Phi(a)} &= \lim_{a,b\to y} \frac{\Phi(b-1) - \Phi(a-1)}{b-a} \times \frac{b-a}{\Phi(b) - \Phi(a)}\\ &= \lim_{a,b\to y} \frac{\Phi(b-1) - \Phi(a-1)}{b-a} \times \frac{1}{\varphi(y)}\\ &= \lim_{a,b\to y} \frac{\Phi(b-1) - \Phi(a-1)}{b-1-(a-1)} \times \frac{1}{\varphi(y)}\\ &= \varphi(y-1) \times \frac{1}{\varphi(y)}\end{aligned}$$

Finalmente, $\mathbb{P}(\mu = 0 | Y = y) = \dfrac{1}{1 + \frac{\varphi(y-1)}{\varphi(y)}} = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(y) + \varphi(y-1)}$.

(c) Supongamos que $Y = 0.52$.
Como $\mathbb{P}(\mu = 0 | Y = 0.52) = \frac{\varphi(0.52)}{\varphi(0.52)+\varphi(0.52-1)} = \frac{0.3485}{0.3485+0.3555} = 0.495 < \frac{1}{2}$, decido por $\mu = 1$.