Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2016**

Examen Febrero
Miércoles 1 de Febrero de 2017.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE			
Ej. 1	Ej. 2	Ej.3	TOTAL

Ejercicio 1. [28 puntos]

Dos profesores de una lejana universidad toman un examen oral. Para poner una nota al estudiante luego de su examen, cada profesor debe elegir una nota, estas pueden ser $+1$ o -1. La nota final del estudiante es la suma de las dos notas: si la suma es 2 la nota final es A, si la suma es 0 la nota final es B y si la suma es -2 la nota final es C. Denotamos por X_1 la nota puesta por el primer profesor y X_2 la nota puesta por el segundo.

Lamentablemente los profesores de dicha universidad eligen la nota del estudiante al azar, de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$$\mathbf{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) = \frac{e^{\beta x_1 x_2}}{C} \quad \text{para } x_1, x_2 \in \{-1, +1\},$$

y en donde $\beta \geq 0$ es un parámetro que llamaremos *parámetro de interacción* entre los profesores[1].

1. Completar una tabla como la siguiente,

$X_1 \backslash X_2$	-1	$+1$
-1		
$+1$		

   con las probabilidades correspondientes en función de β y de C. Calcular C en función de β.

2. Determinar las distribuciones marginales de X_1 y X_2 respectivamente.
3. Responder a las preguntas que siguen en función del valor de β. Se recomienda realizar los cálculos usando la constante C y solo sustituir su valor al final de cada cálculo.
   (a) Calcular el coeficiente de correlación entre X_1 y X_2. ¿Qué ocurre cuando $\beta \to +\infty$? Interpretar el resultado.
   (b) Determinar y justificar, según el valor de β, si X_1 y X_2 son independientes.
4. (a) Calcular, en función de β, la probabilidad $\mathbf{P}\left(X_1 = X_2\right)$. Interpretar el resultado analizando los casos extremos en que $\beta = 0$ y cuando $\beta \to +\infty$.
   (b) En la siguiente tabla se muestran las notas finales (i.i.d.) de los estudiantes del curso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	C	A	A	C	B	A	A	C	C	B	B	A	C	B	C	C	A	A

   La primer fila indica el estudiante y la segunda su nota final. A partir de estos datos, estimar el parámetro de interacción β de los profesores indicando qué resultado del teórico se utiliza.

Ejercicio 2. [30 puntos]

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Rayleigh de parámetro σ ($\sigma > 0$) si su densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{x e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad \forall\, x \geq 0.$$

[1]Es importante notar que β puede ser igual a cero.

1. (a) Hallar la función de distribución de X.
   (b) Hallar el valor esperado y la mediana de X.
2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de variables aleatorias idénticamente distribuidas con distribución Rayleigh de parámetro σ.
   (a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de σ.
   (b) Hallar otros dos estimadores de σ, diferentes al de la parte anterior.
3. Sea Y una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. Se define $Z = \sqrt{Y}$:
   (a) ¿Z tiene distribución Rayleigh? En caso afirmativo, indicar el parámetro.
   (b) Sea $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ una muestra i.i.d con la distribución hallada en la parte anterior. A partir de esta muestra dar un estimador para el parámetro λ.

Ejercicio 3. [42 puntos]

Supongamos que alguien, un emisor (E), nos envía un mensaje que contiene el dígito 1 o el dígito 0. Nosotros, el receptor (R), no recibimos el mensaje tal cual fue enviado de origen, sino perturbado por un ruido. Si denotamos por $\mu \in \{0, 1\}$ el dígito enviado por (E), nosotros recibimos $Y = \mu + X$, en donde X es una variable aleatoria de distribución normal $N(0, \sigma^2)$.

1. Bosquejar la densidad de probabilidad de Y según el valor de μ. Explicar si a los efectos de reconstruir el mensaje enviado por (E), es mejor que σ sea grande o pequeño.
2. En esta parte suponemos que $\sigma = 1$. Supongamos que (E) nos envía el mismo dígito μ varias veces y de forma independiente, para que podamos reconstruirlo. Nosotros recibimos entonces una muestra i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_n$, en donde n es la cantidad de veces que (E) nos envía el mensaje.
   (a) Consideremos el siguiente test de hipótesis
   $$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$$
   y la región crítica $R_c = \{\overline{Y}_n > c\}$, en donde $c \in (0, 1)$. Calcular en función de c, n y Φ las probabilidades α de error de Tipo I y β de error de Tipo II.
   (b) Supongamos ahora que $n = 10$ y que hemos recibido los siguientes mensajes:

-1.44	3.29	0.67	-0.68	0.84	-0.27	-0.11	1.59	-0.05	1.27

   ¿Cuál es la decisión al nivel de significancia $\alpha = 0.05$? ¿Cuál es la probabilidad de error de Tipo II a este nivel?
   (c) Con los datos anteriores, calcular el p-valor del test.
   (d) Hallar c^* el valor de c que minimiza la suma $\alpha + \beta$ de ambas probabilidades de error. Indicar para este caso los valores de α y β.
   (e) ¿Cuál es la decisión si se considera $c = c^*$?
   (f) Explicar las ventajas y desventajas de tomar la decisión según lo hecho en la parte (b) o (e).
3. Esta parte es independiente de las anteriores, pero seguimos asumiendo que $\sigma = 1$. Supongamos además que (E) elige al azar el dígito μ que nos va a enviar de forma equiprobable, y que el ruido X es independiente del μ elegido por (E).
   (a) Calcular la probabilidad $\mathbf{P}(\mu = 0 | a < Y \leq b)$, en donde $a < b$. Expresar el resultado en función de Φ la función de distribución normal estándar.
   (b) Denotamos por φ la densidad de la distribución normal estándar. Usando la parte (a) y que para $y \in \mathbb{R}$ con $a < y \leq b$, se tiene que
   $$\lim_{a,b \to y} \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b - a} = \varphi(y),$$
   probar que
   $$\mathbf{P}(\mu = 0 | Y = y) \overset{\text{def}}{:=} \lim_{a,b \to y} \mathbf{P}(\mu = 0 | a < Y \leq b) = \frac{\varphi(y)}{\varphi(y) + \varphi(y-1)}.$$
   (c) Usando la parte anterior, decidirse por $\mu = 1$ o por $\mu = 0$ si se recibe un mensaje con $Y = 0.52$.