

EXAMEN DICIEMBRE
LUNES 19 DE DICIEMBRE DE 2016.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE			
Ej. 1	Ej. 2	Ej.3	TOTAL

Ejercicio 1. [20 puntos]

Cierto entrenador de baby fútbol tiene predilección por los niños zurdos. Si un niño es zurdo, juega en todas las fechas del campeonato. Si es diestro, tiene probabilidad $2/3$ de jugar en cualquier fecha dada, y no depende de cuántas veces haya jugado antes. Sabemos que $1/10$ de los niños del club son zurdos.

- (a) Si Pedro juega en la primera fecha, ¿cuál es la probabilidad de que sea zurdo?
(b) Si Pedro juega en las primeras tres fechas ¿cuál es la probabilidad de que sea zurdo?
- En este club, cada niño tiene una camiseta con su nombre en la espalda. Luis y Celso son dos mellizos que el entrenador es incapaz de distinguir. Luis es zurdo y Celso es diestro. Cada fin de semana estos dos niños tiran una moneda equilibrada, y si sale cara se intercambian las camisetas, engañando al entrenador.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que Celso juegue un determinado partido? ¿Y Luis?
 - Si el campeonato tiene doce fechas, ¿cuántas veces esperamos que juegue Luis? Justifique su respuesta.

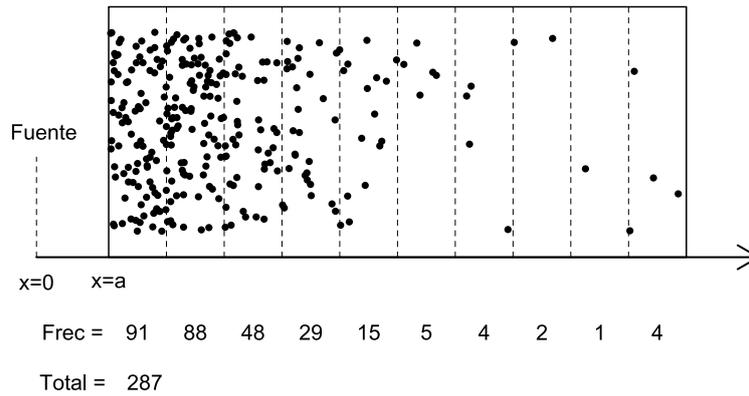
Ejercicio 2. [45 puntos]

Partículas inestables se emiten desde una fuente ubicada en la posición $x = 0$ como en la figura. Cada partícula viaja en línea recta horizontalmente y se desintegra a una distancia X de la fuente. Se asume que X tiene distribución exponencial de parámetro desconocido $\lambda > 0$.

Sin embargo, estos eventos de desintegración se pueden observar solamente si ocurren en una ventana $V = [a, \infty)$. Llamemos X_V a la distancia de desintegración de las partículas observadas en V . En la siguiente figura se muestran las partículas que se desintegran en la ventana V . La porción de la ventana donde se observan partículas desintegradas se ha dividido en 10 intervalos de longitud 10 cm, y se muestra la cantidad de partículas desintegradas en cada intervalo. El total de partículas en la ventana es 287.

- (a) Hallar $p(\lambda, a)$ la probabilidad de que una partícula se desintegre fuera de la ventana V .
(b) Suponiendo que la cantidad de partículas emitidas por la fuente es $N = 500$ y que $a = 10$ cm, hallar una estimación para λ .

Muestra del decaimiento de partículas



2. En esta parte suponemos que se desconoce la cantidad N de partículas emitidas por la fuente.

- (a) Probar que para todo $x \geq a$, la probabilidad condicional de $\{X \leq x\}$ dado que la partícula se desintegra en la ventana $\{X \in V\}$ está dada por

$$P(X \leq x | X \in V) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}.$$

- (b) Denotamos por $F_V(x) = P(X \leq x | X \in V)$, $x \in \mathbb{R}$ a la función de distribución de X_V . Hallar la densidad y el valor esperado de X_V .
- (c) i. Sea X_V^1, \dots, X_V^n una muestra i.i.d. de distribución F_V . Hallar el estimador de máxima verosimilitud λ_{MV} de λ .
- ii. Sabiendo que $a = 10$ y $\sum_{i=1}^{i=287} X_V^i = 7399.711$, calcular λ_{MV} .
- iii. Con los mismos datos que antes y asumiendo que $\lambda = \lambda_{MV}$, dar una estimación para la cantidad N de partículas emitidas.

Ejercicio 3. [35 puntos]

El número de autos N que pasan por un peaje del Uruguay en un intervalo de 1 minuto, se puede describir mediante una variable aleatoria Poisson de parámetro λ . La siguiente tabla muestra los datos de la cantidad de autos contabilizados en 100 días durante el mismo minuto cada día:

Nro. de autos	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia	2	1	2	7	7	12	14	17	8	13	5	6	3	3

1. Realizar un histograma de N . Indicar, primer cuartil, mediana, moda y tercer cuartil de los datos.
2. A partir de los datos, estimar la esperanza y la varianza de N .
3. Hallar un intervalo de confianza aproximado al nivel 0.9 para λ .
4. (a) Plantear un test de hipótesis aproximado para testear:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 10 \\ H_1 : \lambda < 10 \end{cases}$$

- (b) ¿Cuál es la decisión para los niveles $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$ y $\alpha = 0.5$?
- (c) Hallar el p -valor.
- (d) Para la hipótesis alternativa $H_1 : \lambda = 9.99$ y $\alpha = 0.1$, hallar la probabilidad de error de tipo II.