Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2015
Examen, 23 de julio de 2015
Resumen de la solución

Parte de Múltiple Opción (Total: 40 puntos)

Respuesta correcta: 10 puntos	**Respuesta incorrecta: -2 puntos**	**Respuesta en blanco: 0 punto**

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**
RESPUESTA	A	D	D	F

Parte de desarrollo (Total: 60 puntos)

(En esta parte no se penalizan los errores con puntajes negativos)

Ejercicio 1. (35 puntos)
Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Denotamos por $Y = [X]$ la parte entera de X, y por $Z = X - [X]$ la parte fraccionaria de X.

(a) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$ escribir en función de k y λ la probabilidad $P\{Y = k\}$.

$$P\{Y = k\} = P\{k \leq X < k+1\} = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}.$$

(b) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, $x \in [0, 1)$ escribir en función de k, x y λ la probabilidad condicional $P\{X \leq k+x|Y = k\}$.

$$P\{X \leq k + x|Y = k\} = P(\{X \leq k + x\} \cap \{Y = k\})/P\{Y = k\} =$$

$$P(\{k \leq X < k + x\} \cap \{Y = k\})/P\{Y = k\} = \frac{e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}}{e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}} = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

(c) Para cada $x \in [0, 1)$ escribir en función de x y λ la probabilidad $P\{Z \leq x\}$.

$$P\{Z \leq x\} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X \leq k + x\} \cap \{Y = k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \leq k + x|Y = k)\, P\{Y = k\} =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}\, P\{Y = k\} = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

(d) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, $x \in [0, 1)$ escribir en función de k, x y λ la probabilidad $P\{Y = k, Z \leq x\}$.

$$P\{Z \leq x, Y = k\} = P\{X \leq k + x, Y = k\} = P\{X \leq k + x | Y = k\}\, P\{Y = k\} =$$

$$\frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}\, P\{Y = k\} = P\{Z \leq x\}\, P\{Y = k\}.$$

(e) ¿Son Y y Z independientes? Justificar.

En virtud de la factorización de la parte anterior Y y Z son independientes.

Ejercicio 2. (25 puntos)
Considere la siguiente muestra

0.95 0.23 0.61 0.49 0.89 0.76 0.46 0.02 0.82 0.44

(a) Realizar **una** prueba de hipótesis para determinar si la muestra es i.i.d..

Prueba de Rachas up-down: R=7, p-valor=0,4524.
Prueba de Spearman: s=0,3091, p-valor=0,193.
Se pedía una sola de estas pruebas. en cualquiera de los dos casos se acepta la hipótesis de aleatoriedad.

(b) Realizar **una** prueba de hipótesis para determinar si la muestra se ajusta a una distribución normal.

Prueba de normalidad de Lilliefors : $KSL = 0,1412 < 0,239$.
Se acepta la hipótesis de normalidad.

(c) Considere ahora una segunda muestra i.i.d., independiente de la anterior

-0.43 -1.67 0.13 0.29 -1.15 1.19

Realizar una prueba de Kolmogorov y Smirnov para dos muestras para ver si es razonable suponer que ambas muestras provienen de la misma distribución.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras : $D = 0,6333$, $mnD = 38$, p-valor=0,056.
Se acepta la hipótesis de que ambas muestras provienen de la misma distribución.

Nota: Trabajar en todas las pruebas al nivel $\alpha = 0,05$.