Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2015
Examen, 23 de julio de 2015

N^o de Parcial	Cédula	Apellido y Nombre	Salón

Parte de Múltiple Opción (Total: 40 puntos)

Respuesta correcta: 10 puntos	**Respuesta incorrecta: -2 punto**	**Respuesta en blanco: 0 punto**

1. Sean X e Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta

$$p_{X,Y}(x,y) = k(x^{-1} + y^{-1}) \quad \text{con x} \in \{1,2,3\},\ \text{y} \in \{1,2\}$$

Entonces

A. $k = \frac{6}{49}$ y $P(X \geq Y) = \frac{40}{49}$
B. $k = \frac{34}{6}$ y $P(X \geq Y) = \frac{40}{49}$
C. $k = \frac{6}{49}$ y $P(X \geq Y) = \frac{27}{49}$
D. $k = \frac{34}{6}$ y $P(X \geq Y) = \frac{27}{49}$
E. $k = \frac{6}{49}$ y $P(X \geq Y) = \frac{11}{3}$
F. $k = \frac{34}{6}$ y $P(X \geq Y) = \frac{11}{3}$

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de X que tiene distribución absolutamente continua con densidad dada por

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{si x} \in [0,1]; \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

en donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido. El estimador $\hat{\theta}$ de máxima verosimilitud de θ es:

A. $\hat{\theta} = \overline{X}_n$.
B. $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.
C. $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{\overline{X}_n - 1}$.
D. $\hat{\theta} = \frac{-1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(X_i)}$.
E. $\hat{\theta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(X_i)$.
F. $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{-X_i}$.

3. Sean $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ variables aleatorias *i.i.d.* con distribución doble exponencial de parámetro λ centrada en 3. Esto quiere decir que tiene densidad $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-3|}$. Un estimador consistente para λ es:

   A. $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}_n$.
   B. $\hat{\lambda} = 2/\overline{X}_n$.
   C. $\hat{\lambda} = 1/|\overline{X}_n|$.
   D. $\hat{\lambda} = n/\sum |X_i - 3|$.
   E. $\hat{\lambda} = n/\sum (X_i - 3)^2$.
   F. $\hat{\lambda} = 1/\sum (X_i - 3)^2$.

4. Consideramos dos enfermedades cuyas prevalencias son p_1 y p_2 es decir $p_i = P(E_i)$ es la probabilidad de que una persona elegida al azar en la población padezca la enfermedad i para $i = 1, 2$. Se tiene un test T_i para $i = 1, 2$, para detectar cada una de estas enfermedades. Llamemos T_i^+ al suceso: "el test para detectar la enfermedad i dio positivo", para $i = 1, 2$. Se cumple que $p_i = P(E_i) > 0$ y $P(T_i^+) > 0$, para $i = 1, 2$. Buscamos una condición suficiente para que $P(E_1|T_1^+) > P(E_2|T_2^+)$. Se tiene que:

   A. $P(T_1^+|E_1) > P(T_2^+|E_2)$ es una condición suficiente.
   B. $P(T_1^+|E_1)P(E_1) > P(T_2^+|E_2)P(E_2)$ es una condición suficiente.
   C. $P(T_1^+|E_1)/P(E_1) > P(T_2^+|E_2)/P(E_2)$ es una condición suficiente.
   D. $P(T_1^+|E_1) = P(T_2^+|E_2)$ es una condición suficiente.
   E. $P(T_1^+|E_1)P(E_1)/P(E_2) > P(T_2^+|E_2)P(E_2)/P(E_1)$ es una condición suficiente.
   F. Ninguna de las condiciones anteriores implica que $P(E_1|T_1^+) > P(E_2|T_2^+)$.

MÚLTIPLE OPCIÓN: POR FAVOR, **LLENAR CON LETRAS MAYÚSCULAS**

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**
RESPUESTA				

Parte de desarrollo (Total: 60 puntos)

(En esta parte no se penalizan los errores con puntajes negativos)

Ejercicio 1. (35 puntos)
Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Denotamos por $Y = [X]$ la parte entera de X, y por $Z = X - [X]$ la parte fraccionaria de X.

(a) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$ escribir en función de k y λ la probabilidad $P\{Y = k\}$.

(b) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, $x \in [0, 1)$ escribir en función de k, x y λ la probabilidad condicional $P\{X \leq k+x|Y = k\}$.

(c) Para cada $x \in [0, 1)$ escribir en función de x y λ la probabilidad $P\{Z \leq x\}$.

(d) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, $x \in [0, 1)$ escribir en función de k, x y λ la probabilidad $P\{Y = k, Z \leq x\}$.

(e) ¿Son Y y Z independientes? Justificar

Ejercicio 2. (25 puntos)
Considere la siguiente muestra

0.95 0.23 0.61 0.49 0.89 0.76 0.46 0.02 0.82 0.44

(a) Realizar **una** prueba de hipótesis para determinar si la muestra es i.i.d..

(b) Realizar **una** prueba de hipótesis para determinar si la muestra se ajusta a una distribución normal.

(c) Considere ahora una segunda muestra i.i.d., independiente de la anterior

-0.43 -1.67 0.13 0.29 -1.15 1.19

Realizar una prueba de Kolmogorov y Smirnov para dos muestras para ver si es razonable suponer que ambas muestras provienen de la misma distribución.

Nota: Trabajar en todas las pruebas al nivel $\alpha = 0,05$.

NO LLENAR. PARA USO DOCENTE

PREGUNTA	1	2	3	4	1.a.	1.b.	1.c.	1.d.	1.e.	2.a.	2.b.	2.c.	TOTAL
PUNTAJE													