Examen - Probabilidad y Estadística

Sábado 31 de enero de 2015

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 10 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 2 puntos y no contestar puntea cero. Cada problema de desarrollo vale 30 puntos.
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema 1 (5, 10, 10, 5)

En un ambiente controlado se logra dar nacimiento a N individuos simultáneamente. Estos individuos tienen tiempos de vida independientes, que responden a una variable aleatoria exponencial de tasa $\lambda > 0$, medida en inverso de minutos. De manera independiente, en tiempo $T = 1/\lambda$ puede ocurrir una explosión, con probabilidad $p \in (0, 1)$. Tal explosión extinge completamente a la especie. Sea Y la variable aleatoria que representa la cantidad de individuos vivos en tiempo $t = 2T$.

(1) Hallar el recorrido de Y y su función de probabilidad.
(2) Hallar $E(Y)$ y $E(Y^2)$.
(3) Se obtiene una muestra $Y_1, \dots, Y_M$ i.i.d. de la variable Y.
Estimar los parámetros N y p utilizando el método de los momentos.
(4) Asumiendo que $N = 100$ y $M = 10000$, brindar un intervalo de confianza aproximado para p en términos de la muestra anterior, a nivel $\alpha = 0,1$.

Problema 2 (10, 10, 5, 5)

Se considera la vida útil de diez lamparitas, medida en días:

$$0.9; 4.2; 12.7; 2.0; 13.5; 3.4; 0.6; 19.7; 8.4; 24.1$$

(1) Verificar, mediante dos tests, si puede suponerse o no que dicha muestra es iid.
(2) Verificar si se puede suponer que dicha muestra se ajusta a una distribución exponencial.
(3) Asumiendo que la muestra es i.i.d. y responde a unaley exponencial, brindar un intervalo de confianza al nivel $\alpha = 0,1$ para su parámetro λ.
(4) ¿Considera razonable suponer que $\lambda > 100$? Justificar.

Múltiple Opción 1

Una agencia de viajes promociona tres destinos: Miami, Floripa y Roma. Las personas eligen estos destinos con probabilidades 1/4, 1/2 y 1/4 respectivamente. La agencia opera con las aerolíneas A, B, y C, cuyas probabilidades de ser elegidas por los clientes dependen del destino según la siguiente tabla:

- Miami: Aerolneas A, B y C con probabilidades 1/2, 1/5 y 3/10;
- Floripa: Aerolneas A, B y C con probabilidades 1/4, 1/4 y 1/2;
- Roma: Aerolneas A, B y C con probabilidades 1/2, 1/2 y 0.

Si se toman dos personas al azar que contrataron un paquete en la agencia, y ambas viajan por la aerolínea A, ¿cuál es la probabilidad que tengan un mismo destino?

A): 1/2.
B): 1/3.
C): 1/5.
D): 2/3.
E): 3/4.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

Se dispone de la muestra $X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d.$ $\sim$ $Exp(\lambda)$, y se considera la prueba de hipótesis simple $H_0 : \lambda = 2$ con alternativa $H_1 : \lambda = 4$ y región crtica $R = \{\min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\frac{\log(\frac{1}{4})}{32}\}$. Sea π la potencia de esta prueba. Entonces el menor tamaño de muestra n tal que $\pi \geq \frac{3}{4}$ es:

A): 6.
B): 8.
C): 10.
D): 12.
E): 14.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Sean $X_1, X_2, ..., X_n \, iid \sim U[0.25; 0.75]$ las tasas de interes del primer semestre de un año determinado en distintas entidades financieras. Para un capital inicial c se tiene que la deuda luego de un año en la entidad n es $D_n = c\,(1 + X_n)^2$. Si se quiere estimar c por maxima verosimilitud a partir de las variables D_n entonces el estimador $\hat{c}$ buscado es:

A): $\hat{c} = \min_{k=1\ldots n} \left\{ \dfrac{D_k}{(1.25)^2} \right\}$
B): $\hat{c} = \min_{k=1\ldots n} \left\{ \dfrac{D_k}{(1.75)^2} \right\}$
C): $\hat{c} = \max_{k=1\ldots n} \left\{ \dfrac{D_k}{(1.25)^2} \right\}$
D): $\hat{c} = \max_{k=1\ldots n} \left\{ \dfrac{D_k}{(1.75)^2} \right\}$
E): $\hat{c} = 0,25$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Sean $Y_1, \ldots, Y_{100}$ tales que $Y_n = X_n Z_n$ donde $X \sim Ber(0.8)$ y $Z_n \sim Exp(10) \quad \forall n \in \{1, \ldots, 100\}$ y ademas X_i es independiente de $Z_j \quad \forall i \neq j$. Entonces la probabilidad de que el promedio de las variables $Y_1, \ldots, Y_{100}$ sea menor a 8.2 es aproximadamente:

A): 0.5319
B): 0.5080
C): 0.9429
D): 0.6554
E): 0.5793
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.