

EXAMEN
SÁBADO 19 DE DICIEMBRE DE 2015

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

Ejercicio 1. El tiempo de vida en años de las baterías fabricadas por una determinada empresa A, puede ser modelado por una variable aleatoria T . Se asume que T tiene distribución exponencial de parámetro λ .

1. Si la empresa asegura que sus baterías duran en promedio 5 años. ¿Cuál es el valor de λ ? Justificar. En lo que sigue se asume que $\lambda = 0.2$.
2. (a) Se sabe que una batería funciona desde hace 4 años. ¿Cuál es la probabilidad de que funcione al menos seis años?
(b) Se considera que la batería es defectuosa si su tiempo de vida es menor a 6 años. Si en un componente se instalan 5 baterías de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?
(c) ¿Cuál es el número mínimo de baterías que deben instalarse de modo que dicha probabilidad sea mayor que 0.95?
3. Existe otra empresa que fabrica baterías (que llamaremos B) que asegura que la probabilidad de que sus baterías sean defectuosas es igual a 0.1. Se compran 35 baterías de la empresa A y 15 de la empresa B. De estas 50 se eligen 2 sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean defectuosas?

Ejercicio 2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^{-(a+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es tal que $a > 2$.

1. Verificar que f es la función densidad para alguna variable aleatoria X .
2. Hallar la función de distribución de X .
3. (a) Hallar $E(X)$, $\text{Var}(X)$ y m_X , esperanza, varianza y mediana de X .
(b) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra independiente e idénticamente distribuida de variables aleatorias con la densidad definida antes. Hallar el estimador por momentos de a . Probar que es consistente.

4. Dado $c > 0$, se define la variable aleatoria $Y = cX$:
 - (a) Hallar la función de distribución de Y .
 - (b) Hallar $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.
5.
 - (a) Probar que la variable $T = \log(X)$ tiene distribución exponencial de parámetro a .
 - (b) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra independiente e idénticamente distribuida de variables aleatorias con la densidad definida antes. Utilizando la parte anterior construir un nuevo estimador de a diferente del hallado en la parte 3.b.

Ejercicio 3. En una red de datos de gran dimensión se definen las siguientes categorías para cada enlace en base a la carga (C) de dicho enlace.

- Baja si $C \leq 0.4$,
- Media si $0.4 < C \leq 0.7$,
- Alta si $C > 0.7$.

Se asume que la carga C de un enlace sigue una distribución Gaussiana con parámetros $\mu = 0.5$ y $\sigma^2 = 0.01$.

1. Hallar la probabilidad de que un enlace pertenezca a cada uno de las categorías definidas antes.
2. Se sabe que la probabilidad de perder datos para un enlace de la categoría **Media** es de 0.15, mientras que dicha probabilidad se eleva a 0.75 dentro de la categoría **Alta**. Finalmente, la probabilidad de pérdida de un enlace con carga **Baja** es de 0.1. Se pide:
 - (a) Calcular la probabilidad de que un enlace elegido al azar de la red pierda datos.
 - (b) Dado que un enlace tiene pérdida de datos, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría **Media**?
3. Se decide realizar un cambio de ruteo en la red, de modo de disminuir la carga media de cada enlace. Se realizaron medidas de carga en 10 enlaces y se obtuvieron los siguientes resultados:

0.33	0.51	0.59	0.38	0.62	0.61	0.49	0.53	0.52	0.48
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

- (a) ¿Puede asumirse que la muestra es independiente e idénticamente distribuida? Realice un test de hipótesis.
- (b) ¿Puede asumirse que los datos siguen una distribución Gaussiana? Realice un test de hipótesis.
- (c) ¿Le parece razonable afirmar con un nivel de confianza de 95% que el nuevo ruteo disminuyó la carga media por enlace de la red? Justifique su respuesta.