Examen - Probabilidad y Estadística

Viernes 25 de julio 2014

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 10 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 2 puntos y no contestar puntea cero. Cada problema de desarrollo vale 30 puntos.
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema 1 (10, 5, 5, 5, 5)

Se desea estimar la cantidad de peces en un lago, que denotaremos con M. A tales efectos, Miguel toma un pez del lago, lo pinta para diferenciarlo del resto, y lo devuelve nuevamente al lago. Luego, se dedica a pescar (ubicando los peces en un balde), hasta pescar el pez diferenciado. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad de peces pescados hasta obtener el diferenciado (incluyendo este último).

(1) Hallar el recorrido y la función de probabilidad de la variable aleatoria X.
(2) Calcular la esperanza y varianza de la variable aleatoria X.
(3) Se dispone de una muestra $X_1, \ldots, X_n \, iid \sim F_X$.
Hallar un estimador $\hat{M}$ para M utilizando el método de los momentos.
(4) Reiterar la parte anterior para hallar $\overline{M}$, la estimación por máxima verosimilitud.
(5) Asumiendo que $n = 10000$ y $M = 100$, hallar aproximadamente la probabilidad $\hat{p} = P(|M - \hat{M}| > 1)$. ¿Es más preciso el estimador $\hat{M}$ al aumentar n? Justificar.

Problema 2 (10, 8, 8, 4)

Se considera la siguiente muestra de números aleatorios generados por una calculadora:

$$0.16, 0.40, 0.57, 0.66, 0.15, 0.98$$

(1) Verificar, mediante dos tests, si puede suponerse o no que dicha muestra es iid.
(2) Verificar si se puede suponer que dicha muestra se ajusta a una distribución $U(0, 1)$.
(3) Si llamamos $X_1, \ldots, X_6$ a la muestra anterior, consideramos ahora $Y_1, \ldots, Y_6$ definida por $Y_i = ln(X_i)$. Se considera la distribución $F_0(t) = e^t$ si $t < 0$, y $F_0(t) = 1$ si $t \geq 0$. Si se asume que $Y_1, \ldots, Y_6$ es iid, decidir si la nueva muestra se ajusta a F_0.
(4) Sea g una función estrictamente creciente en $(0, 1)$, $Y_i = g(X_i)$ y F_0 una distribución tal que $F_0(t) = g^{-1}(t)$ en el recorrido de g.
¿Es cierto que la muestra $X_1, \ldots, X_6 \, iid \sim U(0, 1)$ si y solo si $Y_1, \ldots, Y_6 \, iid \sim F_0$?

Múltiple Opción 1

Sean $X_1, X_2, ..., X_{10} \, iid \sim N(0, \sigma^2)$ y la prueba de hipótesis $H_0 : \sigma^2 = 1$ contra $H_1 : \sigma^2 = 2$. Entonces, la región crítica óptima de nivel 5% es:

A): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 18.307\}$.
B): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 16.082\}$.
C): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq 18.307\}$.
D): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq 16.082\}$.
E): No existe una región crítica óptima de nivel 5%.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

En cierta carrera universitaria, durante el primer semestre se debe elegir como opcional una única asignatura entre las siguientes: Arte 1, Ciencias 1, y Tecnología 1, siendo respectivamente 30%, 20%, y 50% la probabilidad de que una persona las elija.
Estas asignaturas se pueden exonerar (no se rinde examen), aprobar (hay que rendir examen), o reprobar (hay que recursar).
Se sabe además que:

- en Arte 1: 60% de los estudiantes exonera, 20% aprueba, y 20% reprueba.
- en Ciencias 1: 20% de los estudiantes exonera, 60% aprueba, y 20% reprueba.
- en Tecnología 1: 20% de los estudiantes exonera, 30% aprueba, y 50% reprueba.

Si finalizado el primer semestre seleccionamos a una persona al azar que ya haya cursado por primera vez y que exoneró su asignatura opcional: ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado Tecnología 1?

A): $0,2050$.
B): $0,3125$.
C): $0,3550$.
D): $0,3555$.
E): $0,2825$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución conjunta $F_{(X,Y)}$ dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 1 \\ (1-e^{-2x})(y-1) & \text{si } x \geq 0, 1 < y \leq 2 \\ 1-e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, y \geq 2 \end{cases}$$

Entonces:

A): $X \sim U[0,1]$, $Y \sim Exp(2)$.
B): $X \sim U[1,2]$, $Y \sim Exp(2)$.
C): $X \sim Exp(2)$, $Y \sim U[0,1]$.
D): $X \sim Exp(2)$, $Y \sim U[1,2]$.
E): $F_{(X,Y)}$ no es una distribución conjunta.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Sean $X_1, \ldots, X_n$ *iid* con función de probabilidad $p_X(x) = P\{X = x\} = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, para $x \in \{0,1\}$ y $\theta \in [0, 1/2]$. Se consideran los estimadores por *método de los momentos* y *máxima verosimilitud* de θ, $\hat{\theta}_{MM}$ y $\hat{\theta}_{MV}$ respectivamente, y los estadísticos $\overline{X}_n = \sum_{j=1}^{n} X_j/n$, $X_1^* = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Entonces:

A): $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = \min\{\overline{X}_n, 1/2\}$.
B): $\hat{\theta}_{MM} = X_1^*$ y $\hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n$.
C): $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = X_n^*$.
D): $\hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n$.
E): $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = 1/2$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.