Solución - Examen de Probabilidad y Estadística

Viernes 25 de julio 2014

MO1	MO2	MO3	MO4

Problema 1 (10, 5, 5, 5, 5)

(1) X es uniforme y $R_X = \{1, \dots, M\}$.
(2) $E(X) = \sum_{i=1}^{M} i\frac{1}{M} = \frac{M+1}{2}$; $E(X^2) = \sum_{i=1}^{M} i^2\frac{1}{M} = \frac{(M+1)(2M+1)}{6}$, por lo que $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{M^2-1}{12}$.
(3) Como $\overline{X_n} \xrightarrow{cs} n(M+1)/2$, entonces $\hat{M} = 2\overline{X_n} + 1$ es consistente para M.
(4) La función de verosimilitud es $L(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{M^n}$ si y solo si el máximo de la muestra es no mayor que M. Luego para maximizar L se debe elegir M Reiterar la parte anterior para hallar $\overline{M} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
(5) Se tiene que $n = 10000$, $\hat{M} = 100$. La variable $\hat{M}$ es insesgada para M, con varianza $Var(\hat{M}) = \frac{M^2-1}{3n}$. Aplicando el TCL se consigue que:

$$\begin{aligned}\hat{p} = P(|M - \hat{M}| > 1) &= P(\frac{|\hat{M} - M|}{\sqrt{\hat{M}^2 - 1}}\sqrt{3n} > \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{\hat{M}^2 - 1}}) \\ &\approx 2\phi(-\sqrt{3})\end{aligned}$$

Otra soluciones que usan corrección por continuidad con consistencia son bien valoradas.

Problema 2 (10, 8, 8, 4)

(a) Rachas: $R = 3$ y p-valor $0,4139$. Spearman: $r = 0,428$ y p-valor=0,21, por lo que no se rechaza H_0.
(b) Kolmogorov-Smirnov: Estadístico $0,173$ y p-valor mayor que $0,20$ por lo que no se rechaza H_0.
(c) Todos los cálculos en K-S son invariantes por transformaciones estrictamente crecientes. Como la F_0 propuesta es la distribución del $log(U)$ (con U uniforme en $(0,1)$), se obtiene el mismo estadístico, mismo p-valor y misma conclusión que en (b).
(d) Afirmativo, es la generalización de lo recién observado: una tal F_0 es la distribución de $g(U)$ con U como antes, y K-S es invariante por g.

Múltiple Opción 1

Sean $X_1, X_2, ..., X_{10}\, iid \sim N(0, \sigma^2)$ y la prueba de hipótesis $H_0 : \sigma^2 = 1$ contra $H_1 : \sigma^2 = 2$. Entonces, la región crítica óptima de nivel 5% $\mathcal{R}$ y el error β valen:

A): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 18.307\}$, y $0.75 < \beta < 0.9$.
B): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 18.307\}$ y $0.9 < \beta < 0.95$.
C): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq 18.307\}$ y $0.05 < \beta < 0.1$.
D): $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq 18.307\}$ y $0.1 < \beta < 0.25$.
E): Existe una región crítica de nivel 5% tal que $\beta = 0.03$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

En cierta carrera universitaria, durante el primer semestre se debe elegir como opcional una única asignatura entre las siguientes: Arte 1, Ciencias 1, y Tecnología 1, siendo respectivamente 30%, 20%, y 50% la probabilidad de que una persona las elija.
Estas asignaturas se pueden exonerar (no se rinde examen), aprobar (hay que rendir examen),

o reprobar (hay que recursar).
Se sabe además que:

- en Arte 1: 56% de los estudiantes exonera, 24% aprueba, y 10% reprueba.
- en Ciencias 1: 22% de los estudiantes exonera, 58% aprueba, y 20% reprueba.
- en Tecnología 1: 35% de los estudiantes exonera, 25% aprueba, y 40% reprueba.

Si finalizado el primer semestre seleccionamos a una persona al azar que ya haya cursado por primera vez y que exoneró su asignatura opcional: ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado Tecnología 1?

A): $0,50$
B): $0,45$
C): $0,76$
D): $0,35$
E): $0,28$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Se dispone de una muestra $X_1, \dots, X_n$ iid de variables Bernoulli de parámetro p desconocido, y se realiza el siguiente test de hipótesis simple $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p = p_1$, con $p_1 < p_0$. Sea R_{NP} la región de Neyman-Pearson y $\pi = 1 - \beta$ es su potencia al nivel α. Denotemos ϕ a la distribución normal estándar. Entonces:

A): $R_{NP} = \{\overline{X_n} > (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0+p_1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}})$
B): $R_{NP} = \{\overline{X_n} > (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0-p_1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}})$
C): $R_{NP} = \{\overline{X_n} > (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0+p_1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}})$
D): $R_{NP} = \{\overline{X_n} < (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_1-p_0}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}})$
E): $R_{NP} = \{\overline{X_n} < (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0-p_1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}})$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Sean $X_1, \dots, X_n$ *iid* con función de probabilidad $p_X(x) = P\{X = x\} = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, para $x \in \{0, 1\}$ y $\theta \in [0, 1/2]$. Se consideran los estimadores por *método de los momentos* y *máxima verosimilitud* de θ, $\hat{\theta}_{MM}$ y $\hat{\theta}_{MV}$ respectivamente, y los estadísticos $\overline{X}_n = \sum_{j=1}^n X_j/n$, $X_1^* = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ y $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Entonces:

A): $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = \min\{\overline{X}_n, 1/2\}$.
B): $\hat{\theta}_{MM} = X_1^*$ y $\hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n$.
C): $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = X_n^*$.
D): $\hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n$.
E): $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = 1/2$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.